21. februar 2012

Merjenje atomskih mas. Za merjenje mas uporabljamo pripravo, ki je sestavljena iz dveh delov. V prvem nerelativistično pospešimo enkrat ionizirane atome (torej ione) z znano napetostjo, v drugem pa ukrivimo njihov tir s prečnim magnetnim poljem. Za umeritev uporabimo ione izotopa ^{12}C. Ker naravni ogljik v 1.1 % nastopa kot izotop ^{13}C, bomo poleg tira ^{12}C videli tudi tir teh ionov. Izmerjeno razmerje radijev je q=$\sqrt{\frac{13.003355}{12}}$=1.040967. Kakšna je vezavna energija ^{13}C?

Masa atoma	$m_a(^{12}C)=12u$
Masa jedra	$m_j(^{12}C)=12u-12m_e$
Masa iona	$m_i(^{12}C^+)=12u-m_e$
Odvisnost krivine r od mase	$r=\frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e_0}}$
Masa iona	$m_i(^{13}C^+)=q^2 m_i(^{12}C^+)$
Masa jedra	$m_j(^{13}C)=m_i(^{13}C^+)-11m_e$
Vezavna energija	$W_v/c^2=m_j(^{13}C)-6m_p-7m_n$ [-0.1 u]
Masa protona	$m_p=1.007276$ u
Masa nevtrona	$m_n=1.008665$ u
Masa elektrona	$m_e=5.485799\times10^{-5}$ u
u	uc^2=931,494 MeV

Zrcalna jedra: Za zrcalna jedra bo razlika njunih vezavnih energij posledica različne elektrostatske energije jeder. Jedro $^{13}_{7}$N razpade z β^+ razpadom na jedro $^{13}_{6}$C, pri čemer nam meritve pokaže, da je maksimalna kinetična energija nastalega pozitrona 1.2 MeV. Oceni polmer jeder $^{13}_{7}$N oziroma $^{13}_{6}$C!

Električno polje v kroglici	$E(\mathbf{r})=\frac{Ze_0 r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{\mathbf{r}}{r}$
Električno polje zunaj kroglice	$E(\mathbf{r})=\frac{Ze_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$
Potencial v kroglici	$U(\mathbf{r})=U(0)-\frac{Ze_0 r^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$
Potencial zunaj kroglice	$U(\mathbf{r})=U(\infty)+\frac{Ze_0}{4\pi\varepsilon_0 r}$
Zveznost pri r=R	$U(0)=U(\infty)+\frac{3Ze_0}{8\pi\varepsilon_0 R}$
Poljubna ničla potenciala	$U(\mathbf{r};r<R)=\frac{Ze_0}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$
Potencialna energija	$W_{ep}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \rho_e(\mathbf{r})U(\mathbf{r})dV$
Za $\rho_e=\frac{Ze_0}{4\pi R^3}$, $r<R$; 0 sicer	$W_{ep}(Z)=\frac{3}{20}\frac{Z^2e_0^2}{\pi\varepsilon_0 R}$

Zrcalna jedra:

$$\Delta m = m_X - m_Y$$
$$\Delta m = (Z+1)m_p + (A-(Z+1))m_n - W_v(^{A}_{Z+1}X)/c^2 - Zm_p + (A-Z)m_n - W_v(^{A}_{Z}Y)/c^2$$
$$\Delta m = m_p + W_{ep}(Z+1)/c^2 - m_n - W_{ep}(Z)/c^2$$

$$(\Delta m)c^2 = (m_p-m_n)c^2 + \frac{3}{20}\frac{e_0^2}{\pi\varepsilon_0 R}(2Z+1)$$

Beta razpad:

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{Z+1}X &\rightarrow {}^{A}_{Z}Y + e^+ + \nu \\
W^{max}_{kin,e^+} &= (m_X - m_Y)c^2 - m_e c^2 \\
(\Delta m)c^2 &= W^{max}_{kin,e^+} + m_e c^2
\end{aligned}
$$

Radij :

$$R = \frac{3}{20}\frac{e_0^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{2Z+1}{W^{max}_{kin,e^+} + m_e c^2 - (m_p - m_n)c^2} \qquad [4\ \text{fm}]$$

Primerjaj vezavno energijo, napovedano v okviru semiempirčne masne formule, z izmerjeno za jedra m(${}^{12}_{6}$C)=12 u, m(${}^{40}_{20}$Ca)=39,962591 u, m(${}^{88}_{38}$Sr)=87,905617 u in m(${}^{197}_{79}$Au)=196,966551 u! Navedene mase so mase atomov! Formula:

$$W_v = w_0 A - w_1 A^{2/3} - w_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - w_3 \frac{(A-2Z)^2}{A} + w_4 \frac{\delta_{ZN}}{A^{3/4}}$$

S prileganjem krivulje dobimo Rohlf(Wapstra) parametrizacijo: w_0=15,75(14,1) MeV, w_1=17,8(13) MeV, w_2=0,71(0,59) MeV, w_3=23,7(19) MeV, w_4=11,2(33,5) MeV; δ_{ZN}=1 za sodo-soda in -1 za liho-liha ter 0 za ostala jedra. Glede na specifično vezavno energijo $w_v=W_v/A$ - katera jedra so najbolj stabilna?

28. februar 2012

Kakšno je najugodnejše število protonov za dano skupno število nukleonov v jedru? Primerjaj rezultat pridobljen iz semiemipirične masne formule z razmerji za ${}^{40}_{20}$Ca, ${}^{88}_{38}$Sr in ${}^{197}_{79}$Au!

$Z/A=0.5/(1+(w_2/4w_3)A^{2/3})$, w_2=0.7 MeV, w_3=23.3 MeV

Pri sipanju elektronov z energijo 300 MeV na nekem jedru opazimo prvi minimum v številu izmerjenih sipanih delcev pri 30°. Kakšna je ocena za polmer jedra, če vzamemo, da je jedro homogena kroglica?

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{3}{(sR_j)^3}\Big(\sin(sR_j) - (sR_j)\cos(sR_j)\Big) \\
&\text{Min @ } sR_j = (k - \frac{1}{2})\pi\ ;\ k = 2, \dots \\
sR_j &= \frac{2pcR_j}{\hbar c}\sin\theta/2 = \frac{3\pi}{2} \\
R_j &= \frac{3\pi}{2}\frac{\hbar c}{2pc\sin\theta/2} \qquad [6\ \text{fm}]
\end{aligned}
$$

Določi luminoznost eksperimenta, pri katerem pada tok 1 mA elektronov izostrenih na 1 mm^2, z energijo 250 Mev na tarčo, listič zlata ($^{197}_{79}$Au) z gostoto 19 g/cm^3, debeline 100 μm! Curek sipanih delcev merimo z detektorjem preseka 5 cm^2 na razdalji 10 cm od tarče pri kotu 30° napram smeri vhodnega toka. Kako pogosti bodo zadetki v takem detektorju? Delaj se, da je jedro zlata točkasto!

$$L = N_{\text{tarča}} \frac{dn_{\text{curek}}}{dSdt} = \frac{\rho N_A S d}{M}\frac{I}{e_0 S} = \frac{\rho N_A I d}{M e_0} \qquad [3,6 \times 10^{37}/\text{m}^2\text{s}]$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{2pc}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{Ze_0^2\hbar c}{4\pi\varepsilon_0\hbar c E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2} = \left(\frac{197\text{MeVfm}}{\alpha E}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4\theta/2}$$

$$[0.0018\ \text{fm}^2/\text{ster} = 18\mu\text{barn/ster}]$$

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = L\frac{d\sigma}{d\Omega} \qquad [6,5\times 10^4/\text{s}]$$

$$\Delta\Omega = \frac{S}{r^2} \qquad [5\times 10^{-2}]$$

$$\Gamma = \int_{\Delta\Omega} \frac{d\Gamma}{d\Omega} d\Omega \approx \frac{d\Gamma}{d\Omega}\Delta\Omega \qquad [3,3\ \text{kHz}]$$

Pokaži, da bo radialni del valovne funkcije, rešitve za jedrski potencial $Y_{lm}(\theta,\phi)$ lastna rešitev za radialni del operatorja ∇^2 z lastno vrednostjo -l(l+1).

V nekem jedru iz energijskega spektra razberemo, da je energijska razlika med stanjem z zadnjim nukleonom v stanju 2d$_{3/2}$ in stanjem z zadnjim nukleonom v stanju 2d$_{5/2}$ enaka 1.35 MeV. Na podlagi te razlike lahko ocenimo jakost sklopitve spin-tir, ki jo zapišemo z energijskim prispevkom W_s=-2$\eta\hat{l}\hat{s}$. Kakšna je jakost sklopitve η?

$$\begin{aligned}
\hat{j} &= \hat{l} + \hat{s} \\
\hat{j}^2 &= \hat{l}^2 + 2\hat{l}\hat{s} + \hat{s}^2 \\
2\hat{l}\hat{s} &= \hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2 \\
2d_{3/2} &: \ j = 3/2\ ;\ l = 2\ ;\ s = 1/2 \\
2d_{5/2} &: \ j' = 5/2\ ;\ l = 2\ ;\ s = 1/2 \\
\Delta W &= \eta\Big(j'(j'+1) - j(j+1)\Big) = 5\eta \\
\eta &= \frac{\Delta W}{5} \qquad [0.27\ \text{Mev}]
\end{aligned}$$

6. marec

V istem jedru je razlika med stanjem zadnjega nukleona $2f_{7/2}$ in $2d_{5/2}$ enaka 6.3 MeV. Če privzameš, da se nukleon giblje v harmoničnem potencialu V(r)=-$V_0+\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, določi parameter ω, ki določa strmino potenciala! Upoštevaj prispevek sklopitve spin-tir.

$$W_{n_r l j} = (2(n_r-1)+l+3/2)\hbar\omega - 2\eta\hat{l}\hat{s}$$

$2f_{7/2}\ :\ n_r = 2\ ;\ l=3\ ;\ j=7/2;$

$2d_{5/2}\ :\ n_r' = 2\ ;\ l'=2\ ;\ j'=5/2;$

$$\Delta W = \Big(2(n_r - n_r') + l - l'\Big)\hbar\omega - \Big(j(j+1) - l(l+1) - j'('j+1) - l'(l'+1)\Big)\eta =$$
$$= \hbar\omega - \eta$$
$$\hbar\omega = \Delta W + \eta \qquad [6,6\ \text{MeV}]$$

Iz podatka za parameter ω lahko sklepaš tudi o globini harmoničnega potenciala, V_0. Za podatke iz prejšnje naloge in jedro z 200 nukleoni (kar ti da približno oceno za radij jedra) oceni globino potenciala pri r=0!

$$R_j = r_0 A^{1/3} \qquad r_0 = 1.1\ \text{fm}$$
$$V(R_j) = 0 \ \rightarrow\ V_0 = -\frac{1}{2}m_{p,n}\omega^2 R_j^2 = -\frac{1}{2}\frac{m_{p,n}c^2\hbar^2\omega^2 r_0^2 A^{2/3}}{\hbar^2 c^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{938\ \text{MeV}\cdot(6.6\ \text{MeV})^2\cdot 1,2\ \text{fm}^2 200^{2/3}}{(197\text{MeVfm})^2} \qquad [\text{-21.6 MeV}]$$

Dopolni tabelo! [Rešitve zapisane v krepkem tisku.]

Jedro	J^P	$\left(\frac{\mu}{\mu_N}\right)$
^{1}H	$1/2^+$	2.79
^{2}H	1^+	0.86
^{3}H	$1/2^+$	**2.79**
^{3}He	$\mathbf{1/2^+}$	**-1.93**
^{4}He	$\mathbf{0^+}$	**0**

V zgornji tabeli nismo znali določiti magnetnega momenta liho-lihega jedra ^{6}Li. Pokaži, da lahko efektivni(!) magnetni moment g para delcev, prvi z efektivnim giromagnentnim razmerjem g_1 in vrtilno količino j_1 ter drugi z efektivnim giromagnetnim razmerjem g_2 in skupno vrtilno količino j_2 zapišemo kot

$$g = \frac{1}{2}(g_1+g_2) + \frac{1}{2}(g_1-g_2)\frac{j_1(j_1+1)-j_2(j_2+1)}{J(J+1)}$$

Kjer je J(J+1) lastna vrednost skupne vrtilne količine J=j_1+j_2. Določi magnentni moment jedra ^{6}Li! [g=0.5(3.29-1.93)=0.68, približno enako kot ^{2}H]

Primerjaj izmerjene magnetne momente, spin in parnost spodaj naštetih jeder z napovedmi lupinskega modela! [rešitve za lup. model in razporeditev nukleonov po stanjih vpisane v tabelo]

Jedro	J^P	μ [meritev]	μ [lup. model]
${}^{43}_{20}$Ca	$\frac{7}{2}^-$	-1.32 μ_N	-1.93 μ_N
${}^{93}_{41}$Nb	$\frac{9}{2}^+$	6.17 μ_N	6.8 μ_N
${}^{137}_{56}$Ba	$\frac{3}{2}^+$	0.931 μ_N	1.01 μ_N
${}^{197}_{79}$Au	$\frac{3}{2}^+$	0.145 μ_N	0.16 μ_N

<table>
<tr><th>Nevtroni</th><th>Protoni</th><th>N</th></tr>
<tr><td colspan="2">$1s_{1/2}$</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1p_{3/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1p_{1/2}$</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1d_{5/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$2s_{1/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1d_{3/2}$</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1f_{7/2}$</td><td>28</td></tr>
<tr><td colspan="2">$1p_{3/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1f_{5/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$2p_{3/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1f_{5/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$2p_{1/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1g_{9/2}$</td><td>50</td></tr>
<tr><td>$2d_{5/2}$</td><td>$1g_{7/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$1g_{7/2}$</td><td>$2d_{5/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">$1h_{11/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$3s_{1/2}$</td><td>$2d_{3/2}$</td><td></td></tr>
<tr><td>$2d_{3/2}$</td><td>$3s_{1/2}$</td><td>82</td></tr>
</table>

Jedro	Razporeditev
${}^{43}_{20}$Ca	n(23): $(1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(1d_{3/2})^4(2s_{1/2})^2(1f_{7/2})^3$
${}^{93}_{41}$Nb	p(41): [20] $(1f_{7/2})^8(1f_{5/2})^6(2p_{3/2})^4(2p_{1/2})^2(1g_{9/2})^1$
${}^{137}_{56}$Ba	n(81): [40] $(1g_{9/2})^{10}(2d_{5/2})^6(1g_{7/2})^8(1h_{11/2})^{12}(3s_{1/2})^2(2d_{3/2})^3$
${}^{197}_{79}$Au	p(79): [40] $(1g_{9/2})^{10}(1g_{7/2})^8(2d_{5/2})^6(1h_{11/2})^{12}(2d_{3/2})^3$

$$\frac{\mu}{\mu_N} = jg_L - \frac{1}{2}\Big(g_L - g_S\Big) \quad ; \quad j = l + \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mu}{\mu_N} = jg_L + \frac{j}{2(j+1)}\Big(g_L - g_S\Big) \quad ; \quad j = l - \frac{1}{2}$$

	Nevtron	Proton
g_L	0	1
g_S	-3,83	5,59

μ_N=5·10^3 Afm^2=3·$10^{-8}\frac{\text{eV}}{\text{T}}$

12. marec

Primerjaj razpadni čas, izračunan z Geiger-Nuttalovim pravilom za razpad ${}^8_4$Be→$2{}^4_2$He+0.094 MeV z izmerjenim časom τ_m=2.6·10^{-17} s! Za čas τ_0 vzami kar jedrsko časovno skalo τ_0=2R/v$_F$=2.6·10^{-23}s·A$^{1/3}$, v kateri nastopa hitrost nukleonov pri Fermijevi energiji, ki jo dobimo (klasično) kot $v_F = \sqrt{2E_F/m_N}$, s Fermijevo energijo 38 MeV. Lahko ocenimo hitrost nukleonov še kako drugače?

$$G = (Z_\alpha Z_D \alpha)\pi\sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q}} f\left(\frac{r_s}{r_c}\right) \quad ; \quad Z_\alpha = 2 \qquad [12,8]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right) \qquad [f(0,05) = 0,7]$$

$$r_c = Z_\alpha Z_D \alpha \frac{\hbar c}{Q} \qquad [61,2 \text{ fm}]$$

$$r_s = r_0 \cdot (A_D^{1/3} + A_\alpha^{1/3}) \quad ; \quad A_\alpha = 4 \qquad [3,2 \text{ fm}]$$

$$\mu = \frac{m_\alpha \cdot m_D}{m_\alpha + m_D} \quad ; \quad m_\alpha \approx 4u \qquad [1,8 \text{ GeV}]$$

$$\tau = \tau_0 e^G \qquad [9.8 \cdot 10^{-18} \text{ s}]$$

x	f(x)
0	1
0.05	0.717686
0.1	0.604181
0.15	0.519498
0.2	0.450185
0.25	0.391002
0.3	0.339254
0.35	0.293338
0.4	0.252215
0.45	0.21517

x	f(x)
0.5	0.18169
0.55	0.151401
0.6	0.124027
0.65	0.099365
0.7	0.0772743
0.75	0.0576689
0.8	0.0405193
0.85	0.0258646
0.9	0.0138468
0.95	0.00481823
1	0

Za koliko manjša bo verjetnost za razpad β^+, ki ga podaja formula:

$$^{194}_{79}Au \rightarrow ^{194}_{78} Pt + e^+ + \nu,$$

ker se mora pozitron s kinetično energijo okrog 1 MeV prebiti skozi električni potenical jedra? Uporabi Geiger-Nuttalovo formulo!

$$G = (Z_e Z_D \alpha)\pi \sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q}} f\left(\frac{r_s}{r_c}\right) \quad ; \quad Z_e = 1 \qquad [1,25]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right) \qquad [f(0,05) = 0,7]$$

$$r_c = Z_e Z_D \alpha \frac{\hbar c}{Q} \qquad [112 \text{ fm}]$$

$$r_s = r_0 A_D^{1/3} + r_e \quad ; \quad r_e \approx 0 \qquad [6,4 \text{ fm}]$$

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_D}{m_e + m_D} \quad ; \quad m_e \ll m_D \qquad [0,5 \text{ MeV}]$$

$$w_{\text{tunel}}/w_{\text{brez}} = e^{-G} \qquad [1/3,4]$$

13. marec

Z α **razpadom** razpadata dva izotopa Am takole:

$$^{241}_{93}\text{Am} \rightarrow ^{237}_{91} \text{Np} + ^4_2 \text{He} + 5.485 \text{ MeV} \qquad t_{1/2} = 432 \text{ let}$$
$$^{243}_{93}\text{Am} \rightarrow ^{239}_{91} \text{Np} + ^4_2 \text{He} + 5.275 \text{ MeV}$$

Na podlagi Geiger-Nuttalovega pravila oceni razpolovni čas za razpad jedra ^{243}Am in ga primerjaj z izmerjenim $t_{1/2}^{243}$=7370 let!

$$241 \quad \leftrightarrow \quad 1 \qquad ; \quad 243 \quad \leftrightarrow \quad 2$$

$$t_2/t_1 = e^{G_2}/e^{G_1} \quad \rightarrow \quad \ln[t_2/t_1] = G_2 - G_1$$

$$G_i = (Z_\alpha Z_D \alpha)\pi \sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q_i}} f\left(\frac{r_s}{r_{c,i}}\right) \quad ; \quad r_{s,1} \approx r_{s,2} \quad , \quad \mu_1 \approx \mu_2 \quad [G_1 = 73,6]$$

$$r_s = r_0(A_D^{1/3} + A_\alpha^{1/3}) \quad ; \qquad [8,6 \text{ fm}]$$

$$\mu = \frac{m_\alpha \cdot m_D}{m_\alpha + m_D} \quad ; \quad m_\alpha \ll m_D \qquad [3,6 \text{ GeV}]$$

$$r_{c,i} = Z_\alpha Z_D \alpha \frac{\hbar c}{Q_i} \qquad [r_{c,1} = 47,7 \text{ fm}]$$

$$x_1 = r_s/r_{c,1} \quad \rightarrow \quad f(0.18) = 0.48$$

Ker je $\Delta Q/\mathrm{Q}_1 \approx 4$ % majhno, razvijemo okrog G_1:

$$G_2 = G_1\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}}f(x_2)/f(x_1) \qquad \approx \quad G_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta Q}{Q_1}\right)\left(1+\frac{\Delta f}{f(x_1)}\right)$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{df}{dx} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$$

$$f(x_1+\Delta x) = f(x_1)+\Delta x\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_1} = f(x_1)\left(1-\frac{\Delta x}{x_1}\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{f(x_1)}\right)$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = x_1\left(\frac{Q_2}{Q_1}-1\right) = x_1\left(\frac{Q_1+\Delta Q}{Q_1}-1\right) = x_1\frac{\Delta Q}{Q_1}$$

$$\frac{\Delta f}{f(x_1)} = -\frac{2}{\pi}\frac{\Delta x}{x_1}\frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{f(x_1)} = -\frac{\Delta Q}{Q_1}\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{f(x_1)}$$

$$G_2 - G_1 = G_1(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta Q}{Q_1})(1-\frac{\Delta Q}{Q_1}\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{f(x_1)}) - G_1$$

$$\Delta G = -G_1\frac{\Delta Q}{Q_1}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{x_1(1-x_1)}}{f(x_1)}\right) \quad \rightarrow \quad [-G_1\frac{\Delta Q}{Q_1};\ 2,8]$$

$$t_2/t_1 = e^{\Delta G} \qquad [16,7;\ t_2 = 7226 \text{ let}]$$

Energijsko možnega razpada:

$$^{194}_{79}\mathrm{Au} \rightarrow ^{190}_{77}\mathrm{Ir} + ^{4}_{2}\mathrm{He} + 1.8\ \mathrm{MeV}$$

še niso opazili. Kaj lahko sklepaš o razpadnem času na podlagi Geiger-Nuttalovega pravila? Za konstanto τ_0 vzemi kar jedrsko časovno skalo 2.6 $\mathrm{A}^{1/3}\cdot 10^{-23}$ s!

$$G = (Z_\alpha Z_D \alpha)\pi\sqrt{\frac{2\mu c^2}{Q}}f\left(\frac{r_s}{r_c}\right) \quad ; \quad Z_\alpha = 2 \qquad [152]$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\sqrt{x}-\sqrt{x(1-x)}\right) \qquad [f(0,07) = 0,67]$$

$$r_c = Z_\alpha Z_D \alpha\frac{\hbar c}{Q} \qquad [123\ \mathrm{fm}]$$

$$r_s = r_0\cdot(A_D^{1/3}+A_\alpha^{1/3}) \quad ; \quad A_\alpha = 4 \qquad [8,1\ \mathrm{fm}]$$

$$\mu = \frac{m_\alpha\cdot m_D}{m_\alpha + m_D} \quad ; \quad m_\alpha \approx 4u \qquad [3,7\ \mathrm{GeV}]$$

$$\tau = \tau_0 e^G \qquad [1,5\cdot 10^{44}\ \mathrm{s} \gg \text{ starost vesolja, } 10^{17}\ \mathrm{s}]$$

Koliko je lahko največ kinetična energija pozitrona v razpadu:

$$^{22}_{11}Na \rightarrow ^{22}_{10}Ne + \mathrm{e}^+\mu_e?$$

Masi atomov sta m(^{22}Na)=21.994436 in m(^{22}Ne)=21.991385.

T_{max}=1.8 MeV

20. marec 2012

Kakšna je najverjetnejša in kakšna povprečna energija delcev β pri dani energijski razliki jeder E_0?

Najverjetnejša energija je tista, pri kateri dobimo največ delcev:

$$\frac{dS}{dE} = 0$$

Uvedemo brezdimenzijske količine $x=E/m_ec^2$, $q=E_0/mc^2$; v teh enotah bo:

$$S(x) = (q-x)^2 x\sqrt{x^2-1}; \quad \frac{dS}{dx} = \frac{(q-x)}{\sqrt{x^2-1}}\Big(-2x(x^2-1) + (q-x)(x^2-1) + x^2(q-x)\Big)$$

$$\frac{dS}{dx} = \frac{(q-x)}{\sqrt{x^2-1}}\Big(-4x^3 + 2qx^2 + 3x - q\Big) = 0$$

Najverjetnejša energija x bo ena od rešitev kubične enačbe. To z nastavkom $t=x-q/6$ najprej predelamo v reducirano obliko:

$$-4x^3 + 2qx^2 + 3x - q \quad \rightarrow \quad t^3 - \frac{q^2+9}{12}t - \frac{2q^3 - 27q}{216} = 0$$

Rešitve kubične enačbe oblike $t^3+Pt+Q=0$ lahko poiščemo v obliki:

$$t_k = 2\sqrt{\frac{P}{-3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left[\frac{3Q}{2P}\sqrt{\frac{-3}{P}}\right] - k\frac{2\pi}{3}\right]$$

Uvedemo $\cos\varphi_0=(3Q/2P)\sqrt{-3/P}$:

$$\sqrt{\frac{P}{-3}} = \frac{\sqrt{q^2+9}}{6}$$

$$\cos\varphi_0 = \frac{q^3 - 13,5\cdot q}{(q^2+9)^{3/2}}$$

Seveda bi lahko računali točno, a za oceno opazimo, da bo z naraščajočim q kaj kmalu $\cos\varphi_0 \approx 1$, torej bo $\varphi_0 \approx 0$, tako da bo za prvo rešitev:

$$t_0 = \frac{\sqrt{q^2+9}}{3} \quad \text{in} \quad x_0 = \frac{q}{6} + \frac{\sqrt{q^2+9}}{3}$$

Dobro je, da vemo, da rešitev preceni lego maksimuma; napaka pa je majhna, od $0.25m_ec^2$ okrog $E_0=2m_ec^2$ nato kaj kmalu pade pod $0.1m_ec^2$.
Povprečno energijo dobimo z integralom:

$$\langle E\rangle = \frac{\int_{m_ec^2}^{E_0} E\cdot S(E)\,dE}{\int_{m_ec^2}^{E_0} S(E)\,dE}$$

Z enakimi spremenljivkami kot zgoraj bo:

$$\langle E \rangle = m_e c^2 \frac{\int_1^q x^2(q-x)^2\sqrt{x^2-1}\,dx}{\int_1^q (q-x)^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx} =$$

Rešitve nedoločenih integralov poiščemo z nastavkom:

$$I(x) = P_n(x)\sqrt{x^2-1} + \alpha \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

kjer je n stopnja polinoma P(x); v števcu bo n=5, v imenovalcu n=4. V števcu bo:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{dP_n}{x}\sqrt{x^2-1} + \frac{xP_n(x)}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\alpha}{\sqrt{x^2-1}} = (q-x)^2 x^2 \sqrt{x^2-1}$$
$$\frac{dP_n}{dx}(x^2-1) + xP_n(x) + \alpha = (q-x)^2 x^2 (x^2-1)$$

Za polinom s koeficienti P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f bo:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
5ax^6 & +4bx^5 & +3cx^4 & +2dx^3 & +ex^2 & - & & & ; & \frac{dP_n}{dx}x^2 \\
 & & -5ax^4 & -4bx^3 & -3cx^2 & -2dx & -e & + & ; & -\frac{dP_n}{dx} \\
ax^6 & +bx^5 & +cx^4 & +dx^3 & +ex^2 & +fx & +\alpha & = & ; & xP_n(x) \\
x^6 & -2qx^5 & +(q^2-1)x^4 & +2qx^3 & -q^2x^2 & & & & ; & (q-x)^2x^2(x^2-1)
\end{array}$$

kar nam da rešitev:

$$I_1(x) = \left(\frac{1}{6}x^5 - \frac{2q}{5}x^4 + \left(\frac{q^2}{4} - \frac{1}{24}\right)x^3 + \frac{2q}{15}x^2 - \left(\frac{q^2}{8} + \frac{1}{16}\right)x + \frac{4q}{15}\right)\sqrt{x^2-1} -$$
$$- \left(\frac{q^2}{8} + \frac{1}{16}\right)\ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

V imenovalcu pa bo:

$$\begin{array}{cccccccccc}
4ax^5 & +3bx^4 & +2cx^3 & +dx^2 & - & & & ; & \frac{dP_n}{dx}x^2 \\
 & & -4ax^3 & -3bx^2 & -2cx & -d & + & ; & -\frac{dP_n}{dx} \\
ax^5 & +bx^4 & +cx^3 & +dx^2 & +ex & +\alpha & = & ; & xP_n(x) \\
x^5 & -2qx^4 & +(q^2-1)x^3 & +2qx^2 & -q^2x & & & ; & (q-x)^2x(x^2-1)
\end{array}$$

z rešitvijo: kar nam da rešitev:

$$I_2(x) = \left(\frac{1}{5}x^4 - \frac{q}{2}x^3 + \left(\frac{q^2}{3} - \frac{1}{15}\right)x^2 + \frac{q}{4}x - \left(\frac{q^2}{3} + \frac{2}{15}\right)\right)\sqrt{x^2-1} +$$
$$+ \frac{q}{4}\ln\left[x + \sqrt{x^2-1}\right]$$

Tako $I_1(1)$=0 kot $I_2(1)$=0, tako da bo:

$$\langle E\rangle = m_e c^2 \frac{I_1(q)}{I_2(q)} =$$

$$= \frac{\left[q^5 - 2q^3 + \frac{51}{4}q\right]\sqrt{q^2-1} - \frac{15}{2}(q^2+\frac{1}{2})\ln(q+\sqrt{q^2-1})}{\left[2q^4 - 9q^2 - 8\right]\sqrt{q^2-1} + 15q\ln(q+\sqrt{q^2-1})}$$

Za dovolj velike q bo

$$\langle E\rangle = \frac{q}{2}$$

Pokaži, da je razmerje med verjetnostjo za zajetje elektrona in verjetnostjo za razpad β^+ enako

$$\frac{w_{e^-}}{w_{e^+}} = 2\pi\left(\frac{E_0 + m_e c^2}{m_e c^2}\right)^2 (Z\alpha)^3 \frac{1}{f(Z,E_0)}!$$

V dodatku 1.4 smo izpeljali verjetnost za beta razpad:

$$\Gamma_+ = \frac{G_W^2 M^2}{2\pi^3\hbar}\frac{(m_e c^2)^5}{(\hbar c)^6} f(Z,E_0)$$

Za zajetje elektrona pa računamo matrični element med valovno funkcijo elektrona *vezanega v atomu* in nukleoni kot začetno stanje, ter valovno funkcijo prostega nevtrina ter nukleoni kot končno stanje. Nevtrino bo imel valovno funkcijo kot zgoraj, torej ψ_ν=$1/\sqrt{V}e^{ikr} \approx (1/\sqrt{V})$, spet z razvojem po $\mathbf{k}_\nu\mathbf{r}$. Za elektron pa moramo vzeti verjetnost, da bo elektron na mestu jedra. Največje prekrivanje z jedrom bo imela valovna funkcija elektrona v stanju 1s, ki jo približno ocenimo kar z rešitvijo za osnovno stanje vodikovega atoma, le da vzamemo pravilen naboj jedra, torej Ze_0:

$$\psi_e(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z\alpha m_e c^2}{\hbar c}\right)^{3/2}\exp(-\frac{Z\alpha m_e c^2}{\hbar c}r)$$

Količina $R=\hbar c/(Z\alpha m_e c^2)$ ima dimenzije dolžine in kaže, kako hitro se spreminja valovna funkcija elektrona v okolici jedra. Tudi za velika jedra z Z=100 protoni bo $R\sim 500$ fm, torej mnogo večja od jedra, in lahko za oceno vrednosti na mestu jedra (in s tem verjetnosti za to, da bo elektron *padel* v jedro) z majhno napako vzamemo kar $\psi_e(0)$ in bo matrični element:

$$\mathcal{M} = (G_W M/\sqrt{V})\psi_e(0)$$

Fazni prostor bo tokrat le za nevtrino, torej $\rho(E)=(4\pi)k_\nu^2(dk_\nu/dE)V/(2\pi)^3$. Velja $E=k_\nu\hbar c$, kjer je E kinetična energija, ki jo odnese nevtrino, ki je enaka razliki mas *atomov*, torej $E=E_0+m_e c^2$:

$$\rho_{e^-}(E) = \frac{V}{2\pi^2}\frac{(E_0+m_e c^2)^2}{(\hbar c)^3}$$

Verjetnost za zajetje bo torej:

$$\Gamma_- = \frac{G_W^2 M^2}{\pi\hbar}\frac{(E_0+m_ec^2)^2}{(\hbar c)^3}|\psi_e(0)|^2 = \frac{G_W^2 M^2}{\pi\hbar}\frac{(E_0+m_ec^2)^2}{(\hbar c)^3}\frac{1}{\pi}\left(\frac{Z\alpha m_e c^2}{\hbar c}\right)^3 = \frac{G_W^2 M^2}{\pi^2\hbar}\frac{(E_0+m_ec^2)^2(m_ec^2)^3}{(\hbar c)^6}\Big(Z\alpha\Big)^3$$

Torej bo razmerje verjetnosti:

$$\frac{w_{e^+}}{w_{e^-}} = \frac{\Gamma_+}{\Gamma_-} = \frac{1}{2\pi}\frac{(m_ec^2)^2}{(E_0+m_ec^2)^2}\frac{1}{(Z\alpha)^3}f(Z,E_0)$$

27. marec

Jedro ^{22}Na razpada na naslednje načine:

$$\begin{aligned} a1)\ {}^{22}_{11}\mathrm{Na}(3^+) &\rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}(2^+) + e^+ + \nu \qquad 90.5\ \% \\ a2)\ {}^{22}_{11}\mathrm{Na}(3^+) + e^- &\rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}(2^+) + \nu \qquad 9.5\ \% \\ b)\ {}^{22}_{11}\mathrm{Na}(3^+) &\rightarrow {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}(0^+) + e^+ + \nu \qquad 0.06\ \% \end{aligned}$$

pri čemer je ^{22}Ne(2^+) vzbujeno stanje jedra ^{22}Ne z energijo 1.275 MeV večjo od osnovnega stanja, m(^{22}Na)=21,994436 u, m(^{22}Ne)=21,991386 u.

- Določi E_0 za razpad a1 in b!
- Pojasni razliko med verjetnostjo razpada a1 in b [$(kR)^2 \approx 10^{-4}$]
- Kako dobro lahko ocenimo razmerje med razpadoma a1 in a2 v okviru Fermijevega približka? Za E_0=1,055 MeV in Z=10 je f(E_0,Z) $\approx$ 1/10. [$w_{e^-}/w_{e^+} \approx 1/9.6$]
- Kakšen bo razpadni čas za a1 v okviru Fermijevega približka? G_W=1.16 10^{-11} MeV^{-2} $(\hbar c)^3$, matrični element M_F oceni kar z 1, f(E_0,Z)=1/10. Primerjaj z izmerjenim $t_{1/2}$=2.6 let. Kakšna je potem ocena za M_F? [$1/\tau = G_W^2 (m_ec^2)^5 M_F^2 f(E_0,Z)/2\pi^3(\hbar c)^6\hbar$; τ=24.2 h; M_F=0.06]

Pokaži, da lahko ocenimo razpadne čase pri razpadu γ za dipolne prehode z

$$\frac{1}{\tau^E} = \frac{4c}{3}\alpha\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3|R_f|^2 \qquad \text{in}$$
$$\frac{1}{\tau^M} = \frac{4}{3}\frac{\alpha}{(e_0\hbar c)^2}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3|M_f|^2,$$

pri čemer vzamemo za matrični element kar sklopitev med dipolom jedra in električnim poljem fotona.

Klasično je energija **električnega dipola** v električnem polju kar W_{ep}=-$\mathbf{p}_e\mathbf{E}$=-e$\mathbf{dE}$. Električno polje bo kar električno polje fotona, za EM bo $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{ikr}\cos(\omega t)$,

kjer smo upoštevali, da je foton izhodni val. Za tipične energije fotonov od 10 keV pa do 1 MeV se bo faza (kr) le neznatno spremenila preko jedra; kR=10^{-4} – 10^{-2}, zato bomo vzeli električno polje kar konstantno po kraju; časovni del pa bo cos(ωt)=(1/2)($e^{i\omega t}$ + $e^{-i\omega t}$).
V Fermijevem zlatem pravilu bo $e^{i\omega t}$ ekvivalent energijske razlike ω=E_f-E_i, zato preživi le eden od obeh členov; preostali bi meril prehode iz končnega v začetno stanje, ker pa je končno stanje na začetku prazno, takih prehodov ni. Časovno neodvisni matrični element bo odvisen le še od amplitude električnega polja (polovička zaradi ohranitve le enega od členov za $\mathbf{E}$):

$$W_{ep} = \frac{1}{2}\langle\psi_k|(-e_0\mathbf{E}\cdot\mathbf{d})|\psi_z\rangle = -\frac{e_0}{2}\mathbf{E_0}\langle\psi_k|\sum_{\text{protoni}}\mathbf{r}|\psi_z\rangle = \frac{e_0}{2}\mathbf{E_0}\mathbf{P_e}$$

Izraz -$e_0\langle\psi_k|\sum_{\text{protoni}}\mathbf{r}|\psi_z\rangle$=-$e_0\mathbf{P}_e$ je merilo za električni dipolni moment med končnim in začetnim stanjem jedra. Skalarni produkt izračunamo v sistemu orientiranem vzdolž smeri gibanja fotona, $\mathbf{k}$, in smer električnega polja $\mathbf{E}$ bo v vsakem trenutku pravokotna na to smer, tako da bo $\mathbf{E}_0\mathbf{P}_e$=$E_0P_e\sin\Theta$, kjer je Θ kot med smerjo fotona in smerjo električnega dipola. Kotno odvisnost moramo upoštevati tudi v faznem prostoru; izberemo le fotone, ki se bodo gibali z energijo E v prostorski kot dΩ; g(E)=k^2(dk/dE)dΩV/$(2\pi)^3$; skupaj imamo za Fermijevo zlato pravilo:

$$w = \frac{2\pi}{\hbar}M^2 g(E) = \frac{2\pi}{\hbar}\frac{e_0^2}{4}E_0^2 P_e^2 \sin^2\Theta \frac{E_\gamma^2 V d\Omega}{(\hbar c)^3 (2\pi)^3}$$

Kotni del integriramo: $\int d\Omega sin^2\Theta$=$2\pi\int_{-1}^{1}\sin^2\Theta \; d\cos\Theta$=(4/3)$2\pi$. Amplitudo električnega polja lahko povežemo z energijo fotona - E_γ=V(1/2)$\epsilon_0 E_0^2$; E_0=$(2E_\gamma/V\epsilon_0)^{1/2}$, skupaj bo:

$$w = \frac{4c}{3}\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3 R_p^2$$

Pri **magnetnem polju** postopamo enako. Tu računamo energijo magnetnega dipola μ v magnetnem polju $\mathbf{B}$=$\mathbf{B}_0 e^{ikr}$sin(ω t), pri čemer je B_0=E_0/c. Za matrični element bomo imeli W_{mp}=$\mathbf{p}_m\mathbf{B}$=(1/2i)$\mathbf{B}_0$ $\langle\psi_k|\mu|\psi_z\rangle$=(1/2i)$\mathbf{B}_0\mathbf{M}_p$ = (1/2i)$B_0M_p\sin\Theta$, kjer smo z $\mathbf{M}_p$ označili pričakovano vrednost operatorja magnetnega momenta μ med končnim in začetnim stanjem, polovica pa pride v račun iz enakih razlogov kot zgoraj. Fazni prostor bo identičen kot za električen dipol, skupaj imamo:

$$w = \frac{1}{2\pi\hbar}\frac{B_0^2}{4}M_p^2\frac{4}{3}\frac{E_\gamma^2 V}{(\hbar c)^3} = \frac{4}{3c}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\right)\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3 M_p^2,$$

kjer smo za B_0 vstavili E_0, zanj pa povezavo z energijo fotona E_γ. Do izraza z konstanto fine strukture dobimo z množenjem s kvadratom osnovnega naboja, skupaj bo:

$$w = \frac{4c}{3}\alpha\left(\frac{E_\gamma}{\hbar c}\right)^3\frac{M_p^2}{e_0^2c^2}$$

3. april

Pri razpadu jedra ^{241}Am z razpadom α nastane v večini primerov jedro ^{237}Np v drugem vzbujenem stanju ($J^P=(5/2)^-$, $E_{2,0}=E_2-E_0=59.5$ keV), med njim in osnovnim stanjem pa je še prvo vzbujeno stanje ($(5/2)^+$, $E_{1,0}=33$ keV). Osnovno stanje ima spin in parnost $(7/2)^+$. S pomočjo približnih izrazov za magnetni in električni dipolni prehod jedra oceni:

1. Razmerje verjetnosti za prehod $w[5/2^- \rightarrow 5/2^+]/w[5/2^- \rightarrow 7/2^+]$ s sevanjem γ! Primerjaj z meritvijo, kjer v povprečju izmerimo na 100 razpadov ^{241}Am 35,92 fotonov z energijo $E_{2,0}$ in 2,3 fotona z energijo $E_{1,0}$!

2. Ob znanem $\tau(5/2^-)$=67 ns, oceni razpadni čas stanja $\tau(7/2^+)$. Za oceno magnetnega dipolnega momenta vzami kar povprečje magnetnega dipolnega momenta v končnem in začetnem stanju, upoštevaj, da je razmerje med konverzijo elektrona in sevanjem gamma za prehod $\alpha_T(1 \rightarrow 0)=175$ in za $\alpha_T(2 \rightarrow 0)=1.16$!

1. $w_1/w_2 \approx (E_{\gamma,1}/E_{\gamma,2})^3=11.9$ vs. $N_{2,0}/N_{1,0}=14.6$

2. iz $\tau(2 \rightarrow 0)$ bo:

$$R_f^2 = \left(\frac{\hbar c}{E_{2,0}}\right)^3 \frac{3}{4c\alpha\tau(2 \rightarrow 0)(1+\alpha_T)} = 8.7 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{fm}^2$$

   Potem bomo za razmerje razpadnih časov dobili

$$\frac{\tau(1 \rightarrow 0)}{\tau(2 \rightarrow 0)} = \frac{(1+\alpha_T(2 \rightarrow 0))}{(1+\alpha_T(1 \rightarrow 0))}\left(\frac{E_{2,0}}{E_{1,0}}\right)^3 \left(\frac{R_f}{(M_f/\mu_N)}\right)^2 \left(\frac{2m_N c^2}{\hbar c}\right)^2 = 8 \cdot 10^{-5}$$

   Matrični element M_f bo $(\mu(7/2^+) + \mu(5/2^+))/2$;

$$\mu(7/2^+) = \mu(l=4, j=l-1/2) = jg_L - \frac{j}{2(j+1)}\Big(g_L - g_S\Big) = 1.7\mu_N$$
$$\mu(5/2^+) = \mu(l=2, j=l+1/2) = jg_L - \frac{1}{2}\Big(g_L - g_S\Big) = 4.8\mu_N$$

10. april

- **Kateri od naslednjih** razpadov so možni? Upoštevaj ohranitev barionskega števila in leptonskega števila po generacijah!

$$
\begin{aligned}
pp &\to ppp\bar{p} \\
pp &\to p\bar{p}\pi^+\pi^+ \\
e^+e^- &\to \tau^+\tau^- \\
pp &\to e^+e^- \\
\pi^+ &\to \mu^+\nu_\mu \\
\nu_\mu n &\to p\mu^- \\
\mu^+ &\to e^+\gamma \\
\mu^+ &\to e^+e^-e^+ \\
\pi^0 &\to e^+e^- \\
p &\to ne^+\mu_e \\
K^+n &\to \Sigma^+\pi^0 \qquad \text{(Možen, a krši ohranitev čudnosti S)}
\end{aligned}
$$

- Določi obliko tridelčne spinske (oziroma okusne) valovne funkcije, ki je simetrična na menjavo prvih dveh delcev in ortogonalna tako na valovno funkcijo, simetrično na menjavo kateregakoli para delcev kot na valovno funkcijo, antisimetrično na menjavo prvih dveh delcev.

Imamo simetrično funkcijo:

$$\chi_S = \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(\uparrow\uparrow\downarrow + \uparrow\downarrow\uparrow + \downarrow\uparrow\uparrow\Big)$$

in funkcijo, antisimetrično na menjavo prvih dveh delcev:

$$\chi_A = \sqrt{\frac{1}{2}}\Big((\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow\Big)$$

Nastavimo rešitev:

$$\chi_\sigma = C\Big(\alpha \uparrow\uparrow\downarrow + \beta \uparrow\downarrow\uparrow + \gamma \downarrow\uparrow\uparrow\Big)$$

Valovne funkcije za posamezne kvarke so neodvisne med kvarki, zato bo:

$$(s_1s_2s_3)\cdot(s_1's_2's_3') = \langle s_1s_2s_3|s_1's_2's_3'\rangle = \langle s_1|s_1'\rangle\langle s_2|s_2'\rangle\langle s_3|s_3'\rangle = \delta_{s_1s_1'}\delta_{s_2s_2'}\delta_{s_3s_3'}$$

Naredimo skalarne produkte:

$$
\begin{aligned}
\chi_A\chi_\sigma &= \sqrt{\frac{1}{2}}\Big(\alpha - \beta\Big) = 0 && \alpha = \beta \\
\chi_S\chi_\sigma &= \sqrt{\frac{1}{3}}\Big(\alpha + \beta + \gamma) = 0 && \gamma = -(\alpha + \beta) \\
\chi_\sigma\chi_\sigma &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \qquad \alpha^2 + \alpha^2 + (2\alpha)^2 = 1
\end{aligned}
$$

za končno rešitev:

$$\chi_\sigma = \frac{1}{6}\Big(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow -2 \uparrow\uparrow\downarrow\Big)$$

Stanje je res simetrično na menjavo prvih dveh delcev.

17. april

- **V okviru** kvarkovskega modela določi magnetni moment protona in nevtrona in primerjaj njuno razmerje z izmerjenim μ_p/μ_n=-0.685! [μ_p=e$_0$/2m$_q$, μ_n=e$_0$/3m$_q$, μ_p/μ_n=2/3]

Halzen, Martin, stran 53, spodaj:

Barvni del valovne funkcije je vedno antisimetričen, enačba 2.70, zato mora biti produkt prostora, spina in okusa vedno simetričen na menjavo kvarkov.

V osnovnem stanju (l=0) bo krajevni del simetričen na menjavo delcev; sicer je simetrija povezana z (-1)^l; v osnovnem stanju imajo vsi delci enako valovno funkcijo. Produkt spinskega in okusnega dela mora biti torej simetričen. Ker imata proton in nevtron spin 1/2, povsem simetrične valovne funkcije za spin ne moremo uporabiti - tako stanje bi imelo skupno vrtilno količino J=3/2. Ostaneta nam torej funkciji simetrični oziroma antisimetrični na menjavo prvih dveh kvarkov:

$$\chi_\sigma = \sqrt{\frac{1}{6}}\Big(\downarrow\uparrow\uparrow + \uparrow\downarrow\uparrow -2 \uparrow\uparrow\downarrow\Big)$$
$$\chi_A = \sqrt{\frac{1}{2}}\Big((\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow)\uparrow\Big)$$

Da bomo dobili simetrična stanje, moramo vzeti okusne kombinacije z ekvivalentno simetrijo:

$$p_S = \sqrt{\frac{1}{6}}\Big(duu + udu - 2uud\Big)$$
$$p_A = \sqrt{\frac{1}{2}}\Big((ud - du)u\Big)$$

in sestavimo valovno funkcijo protona:

$$
\begin{aligned}
|p\uparrow\rangle = & \sqrt{\frac{1}{2}}\Big(\chi_\sigma p_s + \chi_A p_A\Big) = \\
= & \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{6}}\Big(d\downarrow u\uparrow u\uparrow + d\uparrow u\downarrow u\uparrow - 2d\uparrow u\uparrow u\downarrow + \\
& \quad + u\downarrow d\uparrow u\uparrow + u\uparrow d\downarrow u\uparrow - 2u\uparrow d\uparrow u\downarrow + \\
& \quad - 2u\downarrow u\uparrow d\uparrow - 2u\uparrow u\downarrow d\uparrow + 4u\uparrow u\uparrow d\downarrow\Big) + \\
+ & \sqrt{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}\Big(u\uparrow d\downarrow u\uparrow - u\downarrow d\uparrow u\uparrow - \\
& - d\uparrow u\downarrow u\uparrow + d\downarrow u\uparrow u\uparrow\Big) = \\
= & \sqrt{\frac{1}{18}}\Big(2d\downarrow u\uparrow u\uparrow - d\uparrow u\downarrow u\uparrow - d\uparrow u\uparrow u\downarrow + \text{okusne permutacije}\Big)
\end{aligned}
$$

Za nevtron bomo vzeli podobne kombinacije para d in samega u kvarka:

$$
\begin{aligned}
n_S &= -\sqrt{\frac{1}{6}}(udd + dud - 2ddu) \\
n_A &= \sqrt{\frac{1}{2}}((du - ud)d)
\end{aligned}
$$

Da je v n_S negativni predznak, se prepričamo z delovanjem $J_- = J_{A-} + J_{B-} + J_{C-}$ na stanje p_S, kjer so A,B in C posamezni kvarki, J_{X-} pa ustrezni operatorji, ki manjšajo tretjo komponento spina za 1.

Potem bo valovna funkcija nevtrona z navzgor obrnjenim spinom

$$
\begin{aligned}
|n\uparrow\rangle = & \sqrt{\frac{1}{2}}\Big(n_S\chi_\sigma + n_A\chi_A\Big) = \\
& \sqrt{\frac{1}{18}}\Big(2u\downarrow d\uparrow d\uparrow - u\uparrow d\downarrow d\uparrow - u\uparrow d\uparrow d\downarrow + \text{okusne permutacije}\Big)
\end{aligned}
$$

Magnetni moment točkastega delca s spinom je:

$$\mu = gQ\frac{e_0\hbar}{2m}S_3$$

z giromagnetnim razmerjem $g \approx 2$ in S_3 z komponento spina ter Q nabojem v enotah osnovnega. Ker imamo tri kvarke, magnetne momente seštevamo:

$$\mu(p) = \sum_{i=1}^{3}\mu_i$$

Proton vzamemo v stanju z največjo komponentno spina vzdolž polja, $|\uparrow\rangle$:

$$\begin{aligned}
\mu_p &= \langle p\uparrow|\mu|p\uparrow\rangle = \\
&= \frac{1}{18}\Big(4(-\mu_d+2\mu_u)+(\mu_d-\mu_u+\mu_u)+(\mu_d+\mu_u-\mu_u)\Big)\times 3 \text{ permutacije} \\
&= \frac{1}{3}\Big(4\mu_u-\mu_d\Big)
\end{aligned}$$

Podobno ravnamo z nevtronom:

$$\begin{aligned}
\mu_n &= \langle n\uparrow|\mu|n\uparrow\rangle = \\
&= \frac{1}{18}\Big(4(\mu_d+\mu_d-\mu_u)+(\mu_u-\mu_d+\mu_d)+(\mu_u+\mu_d-\mu_d)\Big)\times 3 \text{ permutacije} \\
&= \frac{1}{3}\Big(4\mu_d-\mu_u\Big)
\end{aligned}$$

Ker sta masi u in d kvarkov praktično enaki, bosta μ_d in μ_u v razmerju nabojev, Q(u)=2/3 in Q(d)=-1/3:

$$2\mu_d = -\mu_u$$

Ko vstavimo to v razmerje momentov nukleonov, dobimo:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{6\mu_d}{-9\mu_d} = -\frac{2}{3}$$

kar je kar blizu dejanski vrednosti 0,6849....

- **Vektorski mezoni** (J^P=1^-) z elektromagnetnim razpadom prehajajo v pare lepton-antilepton. Pri tem je razmerje med verjetnostjo za razpad mezonov ω in ϕ enako:

$$\frac{\mathcal{M}^2(\phi)}{\mathcal{M}^2(\omega)} = 1,7 \pm 0,41$$

Amplituda za razpad mezona je povezana z nabojem kvarkov, ki sestavljajo mezon:

$$\mathcal{M}^2 = \Big|\sum_i a_i Q_i\Big|^2$$

kjer sta a_i in Q_i delež in naboj kvarkov v mezonu. Vzemi, da je valovna funkcija mezonov ω in ϕ linearna kombinacija valovnih funkcij, dobljenih s simetrijskimi lastnosti delcev, tako da je $\psi(\omega_0)$ SU(3) okusni singlet, $\psi(\phi_0)$ pa tisti član SU(3) okteta, ki ima enaka kvantna števila (I=0, S=0) kot ω_0:

$$\psi(\omega) = \cos\theta\psi(\omega_0) - \sin\theta\psi(\phi_0)$$
$$\psi(\phi) = \cos\theta\psi(\phi_0) + \sin\theta\psi(\omega_0)$$

Določi mešalni kot in s tem pojasni okusno sestavo mezonov ω in ϕ!

$$\psi(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}\Big)$$
$$\psi(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\Big(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}\Big)$$

$$\mathcal{M}^2(\omega) = \Big|\cos\theta Q(\omega_0) + \sin\theta Q(\phi_0)\Big|^2$$
$$\mathcal{M}^2(\phi) = \Big|\cos\theta Q(\phi_0) + \sin\theta Q(\omega_0)\Big|^2$$

$$Q(\omega_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\bigg(\Big(\frac{2}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{3}\Big)\bigg) = 0$$
$$Q(\phi_0) = \frac{1}{\sqrt{6}}\bigg(\Big(\frac{2}{3}\Big) + \Big(-\frac{1}{3}\Big) - 2\Big(-\frac{1}{3}\Big)\bigg) = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

Tako bo:

$$\frac{\mathcal{M}^2(\omega)}{\mathcal{M}^2(\phi)} = \Big|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\Big|^2 = \tan^2\theta = \frac{1}{1,7} \approx \frac{1}{2}$$

Vzeli smo 1/2, kar je konsistentno z meritvijo, da pa lepše rešitve. Potem bo:

$$\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \cos\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

valovne funkcije pa bodo:

$$\begin{aligned}
\psi(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sqrt{2}\psi(\omega_0) - \psi(\phi_0)\Big) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(3u\bar{u} + 3d\bar{d} + 2s\bar{s} - 2s\bar{s}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d}) \\
\psi(\phi) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\sqrt{2}\psi(\phi_0) + \psi(\omega_0)\Big) = \\
&= -s\bar{s}
\end{aligned}$$

Mešanje izloči okusno (in ne simetrijsko) čiste funkcije zaradi velike masne razlike $s\bar{s}$.

24. april

- **Model hiperfine sklopitve** predvideva maso mezonov povezano s skalarnim produktom operatorjev spina $\vec{\sigma}=2\vec{S}$:

  $$M = m_1 + m_2 + a\frac{\vec{S_1}\vec{S_2}}{m_1 m_2}$$

  kjer je M masa sestavljenega delca, mezona, m_1 in m_2 masi gradnikov, kvarkov, σ_1 in σ_2 operatorja spina obeh gradnikov, a pa jakost hiperfine sklopitve. V okviru modela iz izmerjenih mas mezonov m(π, I=1, 0^-)=140 MeV/c^2 in m(ρ, I=1, 1^-)=769 MeV/c^2 določi maso kvarka m_u=m_d in jakost sklopitve a! Iz mase m(ϕ, glej prejšnjo nalogo, 1^-)=1.02 GeV določi še maso kvarka s, m_s in potem izračunaj maso kvarkov K(I=$\frac{1}{2}$, 0^-) in K*(I=$\frac{1}{2}$, 1^-)!

$$\vec{S_1}\vec{S_2} = \frac{1}{2}\bigg(\Big(\vec{S_1} + \vec{S_2}\Big)^2 - \vec{S}_1^2 - \vec{S}_2^2\bigg) = \frac{1}{2}\Big(J^2 - 2S^2\Big)$$

$$\begin{aligned}
M(\pi) &= 2m_u - \frac{3a}{4m_u^2} \\
M(\rho) &= 2m_u + \frac{a}{4m_u^2}
\end{aligned}$$

Od tod dobimo (c=1,$\hbar$=1):

$$\begin{aligned}
M(\pi) + 3M(\rho) &= 8m_u & m_u &= \frac{M(\pi) + 3M(\rho)}{8} = 305,9\ \text{MeV}^2 \\
-M(\pi) + M(\rho) &= \frac{a}{m_u^2} & a &= \Big(M(\rho) - M(\pi)\Big)m_u^2 = 2,05m_u^3
\end{aligned}$$

Zgoraj smo pokazali $\phi = s\bar{s}$, tako da bo:

$$M(\phi) = 2m_s + \frac{a}{4m_s^2}$$

$$m_s^3 - m_s^2\frac{M(\phi)}{2} + \frac{a}{8} = 0 \qquad t = m_s - \frac{M}{6}$$

$$t^3 - 3\mu^2 t + \frac{a}{8} - 2\mu^3 = 0 \qquad \mu = \frac{M}{6}$$

Enačbo tretjega reda rešimo kot zgoraj:

$$t = 2\sqrt{\frac{P}{-3}}\cos\left[\frac{1}{3}\arccos\left\{\frac{3Q}{2P}\sqrt{\frac{-3}{P}}\right\}\right]$$

$$\sqrt{\frac{P}{-3}} = \mu$$

$$\frac{3Q}{2P}\sqrt{\frac{-3}{P}} = 1 - \frac{a}{16\mu^3} = 0.25 \approx 0$$

$$t = 2\mu\cos\left[\frac{1}{3}\pi\right] = \mu\sqrt{3}$$

$$m_s = \mu(1+\sqrt{3}) = 460 \text{ MeV} \quad \text{točno: } 478 \text{ MeV}$$

Zdaj pa še neznane mase:

$$M(K) = m_u + m_s - \frac{3a}{4m_s m_u} = 483 \text{ MeV, merjeno } 493 \text{ MeV}$$

$$M(K^*) = m_u + m_s + \frac{a}{4m_s m_u} = 884 \text{ MeV, merjeno } 892 \text{ MeV}$$

- **Pokaži, da bo** enačba

  $$\Box^2 A_\mu - \partial_\mu(\partial_\nu A^\nu) = \mu_0 c j_\mu,$$

  za četverec EM polja $A_\mu = (\varphi, -c\mathbf{A})$ in četverec gostote električnega toka $j_\mu = (c\rho, -\mathbf{j})$ ekvivalentna setu Maxwellovih enačb. Gostoto magnetnega polja dobimo kot $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, jakost električnega polja pa kot $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$. V zgornjem izrazu je $\Box^2 = \partial_\mu\partial^\mu$ in $\partial_\mu = (\partial/\partial(ct), +\nabla)$.

- **Pokaži, da se** jakost električnega polja in gostota magnetnega polja ne spremenita, če četverec spremenimo takole:

  $$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi,$$

  za poljuben skalar $\chi(t, \mathbf{r})$. Pokaži, da lahko to lastnost uporabimo, da bo veljalo

  $$\partial_\nu A'^\nu = 0,$$

  čemur rečemo tudi Lorentzov pogoj.

- **Za prost** foton oceni število prostostnih stopenj za njegove polarizacije! [$\Box^2$ A_μ=0; $A_\mu=\varepsilon_\mu e^{-iqx}$, $\Box^2 A_\mu = q^2 A_\mu$, q^2=0, $A"_\mu = A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, $\Box^2\Lambda$=0; $\Lambda = iae^{-iqx}$, $\partial_\mu\Lambda = +aq_\mu e^{-iqx}$, $A"_\mu = (\varepsilon_\mu + aq_\mu)e^{-iqx}$; $\partial_\nu A"^\nu$=0, $\varepsilon_\mu q^\mu$=0, a=-ε_0/q_0, $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{q}$=0, 2 polarizaciji, npr. $\boldsymbol{\varepsilon}$=(1,0,0)

- **Povej, zakaj morajo biti** v Diracovi enačbi:

$$H = \alpha_k p_k + \beta m,$$

kjer je p_k k-ta komponenta vektorja gibalne količine, m pa masa delca, matrike α_k in β hermitske (sebiadjungirane), brezsledne, z lastnimi vrednostmi 1 ali -1 in sodih dimenzij! Premisli še, zakaj so to v najpreprostejši različici 4x4 (in ne 2x2) matrike!

H=$H^\dagger$ zato:

$$\alpha_k = \alpha_k^\dagger;$$

Za sledi velja:

$$tr(AB) = tr(BA) \qquad tr(cA) = c \cdot tr(A)$$

Ker pa antikomutirajo bo:

$$\begin{aligned} AB + BA &= 0 \\ AB &= -BA \\ B^{-1}AB &= -A \\ tr(B^{-1}AB) &= tr(-A) \end{aligned}$$

Prvo sled razpišemo:

$$tr(B^{-1}AB) = tr(B^{-1}(AB)) = tr((AB)B^{-1}) = tr(A(BB^{-1})) = tr(A)$$

kar velja za kvadratne matrike (takrat sta levi in desni inverz ista matrika). To vstavimo nazaj v antikomutator:

$$\begin{aligned} tr(B^{-1}AB) &= tr(-A) \\ tr(A) &= -tr(A) \\ tr(A) &= 0 \end{aligned}$$

Za lastne vrednosti λ in lastne vektorje $\mathbf{v}$ velja:

$$\alpha_k \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Ker pa velja:

$$\alpha_k^2 = 1$$

bo veljalo tudi:

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 \mathbf{v} &= (1) \cdot \mathbf{v} \\ \lambda^2 \mathbf{v} &= \mathbf{v} \\ \lambda &= \pm 1; \end{aligned}$$

V primernem koordinatnem sistemu bomo lahko matrike diagonalizirali:

$$D_k = A^{-1}\alpha_k A$$

in bomo sled matrike izračunali kot:

$$tr(\alpha_k) = tr(D_k) = 0 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \ ; \ \lambda_i = \pm 1$$

Torej mora biti n sod; enako za matriko β; Rabimo 4 različne matrike, so le tri matrike velikosti 2x2, ki ustrezajo zgornjim pogojem, zato jih moramo iskati med 4x4 matrikami.

8. maj

- **Kakšni so matrični elementi** za polarizirano sipanje elektronov (Møllerjevo sipanje) v ne-relativistični limiti? Polarizirano sipanje je takšno, pri katerem poznamo spin vseh delcev, ki nastopajo v procesu.

Začnemo s Fermijevim zlatim pravilom, ki se v relativistični (kovariantni) obliki zapiše:

$$T_{fi} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x) = -i\mathcal{M}(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\Sigma_i p_i)$$

Sipalni presek potem dobimo kot:

$$W_{fi} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{F} dQ$$

kjer je F normiran tok delcev (tu zapisan za interakcijo para delcev)

$$F = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| \cdot 2E_1 \cdot 2E_2$$

in dQ (infinitezimalni) del faznega prostora (uporaba enega d je zavajajoča, gre za večkratni diferencial po energijah izhodnih delcev, kotni porazdelitvi, ...):

$$dQ = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_i p_i) d\rho_1 d\rho_2$$

z porazdelitvijo gostote **izstopajočih delcev**. Faktorja dQ in F sta bolj povezana z izvedbo poskusa kot s fiziko, ki je vsa vsebovana v matričnem elementu $\mathcal{M}$.

Za Diracovo enačbo zapišemo matrični element za sipanje dveh delcev kot:

$$-i\mathcal{M} = (ie\bar{u}_{1K}\gamma^\mu u_{1Z})\left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2}\right)(ie\bar{u}_{2K}\gamma^\nu u_{2Z})$$

kjer je e v enotah $\hbar = 1$, c=1 s konstanto fine strukture povezan kot:

$$e^2 = 4\pi\alpha$$

Po kratkem uvodu se lahko lotimo računanja presekov:

$$\mathcal{M} = -4\pi\alpha\left[\frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)}{(p_Ac - p_Cc)^2} - \frac{(\bar{u}_D\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_C\gamma^\mu u_B)}{(p_Ac - p_Dc)^2}\right]$$

$$\text{CMS}: p_A = (E/c, \mathbf{p}),\ p_B = (E/c, -\mathbf{p}),\ p_C = (E/c, \mathbf{p}'),\ p_D = (E/c, -\mathbf{p}')$$

$$p = |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|$$

$$(p_A - p_C)^2 = (E-E)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = -2p^2 + 2p^2\cos\theta = -4p^2\sin^2(\theta/2)$$

$$(p_A - p_D)^2 = -4p^2\cos^2(\theta/2)$$

$$|\mathbf{p}| \ll E : \bar{u}_1^{(s')}\gamma_\mu u_2^{(s)} = (2mc^2)g_{\mu 0}\delta_{ss'}$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\uparrow\uparrow) = \frac{4\pi\alpha(2mc^2)^2}{4p^2c^2}\left[\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\right]$$

$$\mathcal{M}(\downarrow\downarrow\to\downarrow\downarrow) = \mathcal{M}(\uparrow\uparrow\to\uparrow\uparrow)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\downarrow\uparrow) = \frac{4\pi\alpha(2mc^2)^2}{4p^2c^2}\left[\frac{1}{\sin^2(\theta/2)}\right]$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\downarrow\uparrow)$$

$$\mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\uparrow\downarrow) = -\frac{4\pi\alpha(2mc^2)^2}{4p^2c^2}\left[\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\right]$$

$$\mathcal{M}(\uparrow\downarrow\to\downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\uparrow\to\uparrow\downarrow)$$

- **Kakšer pa bo nepolariziran** presek za sipanje elektronov ($e^-e^- \to e^-e^-$) v nerelativistični limiti? [

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\text{spini delcev}}|\mathcal{M}(s_As_B \to s_Cs_D)|^2$$

$$= \frac{1}{4}\frac{(4\pi\alpha)^2(2mc^2)^4}{16p^4c^4}\cdot$$

$$\cdot\ 2\left[1\left(\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} - \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\right)^2 + \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)}\right] =$$

$$= \frac{16\pi^2\alpha^2(mc^2)^4}{p^4c^4}\left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)}\right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2(2E)^2} = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16(mc^2)^2}\left(\frac{mc^2}{pc}\right)^4\cdot$$

$$\cdot\ \left(\frac{1}{\sin^4(\theta/2)} - \frac{1}{\sin^2(\theta/2)\cos^2(\theta/2)} + \frac{1}{\cos^4(\theta/2)}\right) =$$

$$= \frac{r_e^2}{16}\left(\frac{mc^2}{pc}\right)^4 F(\theta) = \frac{r_e^2}{64}\left(\frac{mc^2}{T}\right)^2 F(\theta)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\left(\frac{T}{mc^2} = 0.1,\ \theta = \frac{\pi}{2}\right) = (2.8\ \text{fm})^2\frac{100}{64}4 = 0.5\ \text{barn}$$

- **Pokaži, da za matriko** γ^5=i$\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ velja:
$$\gamma^{5\,\dagger} = \gamma^5$$
$$(\gamma^5)^2 = I$$
$$\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^5 = 0$$

Upoštevamo γ^k=$\gamma^0\alpha_k$, γ^0=β, $\alpha_k^\dagger$=α_k, $\beta^\dagger$=β, $(\gamma^0)^2$=I, $(\gamma^k)^2$=-I, $\gamma^{0\,\dagger} = \gamma^0$, $\gamma^{k\,\dagger}$=-γ^k, $\gamma^\mu\gamma^\nu$+$\gamma^\nu\gamma^\mu$=2g$^{\mu\nu}$, za vsak a bo tudi $\gamma_a\gamma^a$=I, za $\mu \neq \nu$ bo $\gamma_\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma_\mu$:

$$\gamma^{5\,\dagger} = (i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3)^\dagger = -i\gamma^{3\,\dagger}\gamma^{2\,\dagger}\gamma^{1\,\dagger}\gamma^{0\,\dagger} = -i(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = \gamma^5$$

$$\begin{aligned}(\gamma^5)^2 &= \gamma^5\gamma^{5\,\dagger} = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3(-i)(-\gamma^3)(-\gamma^2)(-\gamma^1)\gamma^0 = \\ &= i(-i)(-1)^3\gamma^0\gamma^1\gamma^2(-1)\gamma^2\gamma^1\gamma^0 = (-1)^4\gamma^0\gamma^1(-1)\gamma^1\gamma^0 = \\ &= (-1)^5\gamma^0(-1)\gamma^0 = (-1)^6 I = I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma^5\gamma^\mu &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^\mu = 2g^{3\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 - i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^\mu\gamma^3 = \\ &= 2g^{3\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma_3 - 2g^{2\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^3 + i\gamma^0\gamma^1\gamma^\mu\gamma^2\gamma^3 = \\ &= 2g^{3\mu}\gamma^5\gamma_3 - 2g^{2\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma_2\gamma^3 + 2g^{1\mu}i\gamma^0\gamma^2\gamma^3 - i\gamma^0\gamma^\mu\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= 2g^{3\mu}\gamma^5\gamma_3 - (-1)2g^{2\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma_2 + 2g^{1\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma_1\gamma^2\gamma^3 - \\ &- 2g^{0\mu}i\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + i\gamma^\mu\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \\ &= 2g^{3\mu}\gamma^5\gamma_3 + 2g^{2\mu}\gamma^5\gamma_2 + (-1)^2 2g^{1\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma_1 - 2g^{0\mu}i\gamma^0\gamma_0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 + \gamma^\mu\gamma^5 = \\ &= 2g^{3\mu}\gamma^5\gamma_3 + 2g^{2\mu}\gamma^5\gamma_2 + 2g^{1\mu}\gamma^5\gamma_1 - (-1)^3 2g^{0\mu}i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma_0 + \gamma^\mu\gamma^5 = \\ &= 2g^{3\mu}\gamma^5\gamma_3 + 2g^{2\mu}\gamma^5\gamma_2 + 2g^{1\mu}\gamma^5\gamma_1 + 2g^{0\mu}\gamma^5\gamma_0 + \gamma^\mu\gamma^5 = \\ &= 2g^{\nu\mu}\gamma^5\gamma_\nu + \gamma^\mu\gamma^\nu = 2\gamma^5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma^\nu\end{aligned}$$

$-\gamma^5\gamma^\mu = \gamma^5\gamma^\mu$]

- **Preveri naslednje izraze**:
$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[I] &= 4 \\ \mathrm{tr}[\text{liho število } \gamma \text{ matrik}] &= 0 \\ \mathrm{tr}[\gamma^\mu\gamma^\nu] &= 4g^{\mu\nu} \\ \mathrm{tr}[\gamma^\alpha\gamma^\mu\gamma^\beta\gamma^\nu] &= 4g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} - 4g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} + 4g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\end{aligned}$$

- **Pokaži**, da za γ matrike velja:
$$\gamma_\mu \not{a} = 2a_\mu I - \not{a}\gamma^\mu$$
$$Tr\Big[\gamma_\mu\gamma_\nu\Big] = 4g_\mu\nu$$

in izračunaj:
$$Tr\Big[(\not{k} + m)\gamma_\mu(\not{p} + m)\gamma_\nu\Big]$$

15. maj

- **Polnostne relacije**. Pokaži, da je
$$\sum_{(\text{spini})} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \not{p}c + mc^2!$$

Stacionarno Diracovo enačbo:

$$H\psi = \Big(\boldsymbol{\alpha}\hat{\mathbf{p}} + \beta m\Big)\psi = E\psi$$

rešimo z nastavkom:

$$\psi = ue^{-i(p\cdot x)},$$

kjer je u spinor; vektor stolpec, $(\cdot)$ pa je Lorentzov skalarni produkt. Za delce $(E > 0)$ dobimo rešitvi:

$$u = \sqrt{E+m}\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix},$$

kjer je $\chi^{(s)}$ dvodimenzionalni vektor, ki opisuje spinsko stanje delca. Na voljo imamo dve stanji (recimo $\uparrow$ in $\downarrow$) za katera mora veljati:

$$\chi^{(s)\dagger}\chi^{(s')} = \delta_{ss'},$$

recimo, da imamo kar:

$$\chi^{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \chi^{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Za Paulijevo matriko σ_3 bo:

$$\sigma_3\chi^{\uparrow} = (+1)\chi^{\uparrow} \quad \text{in} \quad \sigma_3\chi^{\downarrow} = (-1)\chi^{\downarrow},$$

nakazujoč projekcijo spina pri vsakem od stanj $\chi^{\uparrow}$,$\chi^{\downarrow}$. Za polnostno relacijo rabimo še adjungirani spinor $\bar{u}$:

$$\bar{u} = u^{\dagger}\gamma^0 = \sqrt{E+m}\Big(\chi^{\dagger(s)}, \quad -\chi^{\dagger(s)}\tfrac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m},\Big)$$

kjer smo uporabili:

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

Polnostna relacija bo torej matrika:

$$\sum_{(s)} \bar{u}(p)u(p) = (E+m)\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi^{\dagger(s)} & -\chi^{\dagger(s)}\frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m} \end{pmatrix},$$

kjer teče s po smernih indeksih s=$\uparrow,\downarrow$; 4x4 matriko prevedemo na 4 produkte 2x2 matrik:

$$\sum_{(s)} \bar{u}(p)u(p) = (E+m)\begin{pmatrix} \sum_{(s)}\left(\chi^{(s)}\chi^{\dagger(s)}\right) & -\frac{1}{E+m}\sum_{(s)}\left(\chi^{(s)}\chi^{\dagger(s)}\right)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ \frac{1}{E+m}\sum_{(s)}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\left(\chi^{(s)}\chi^{\dagger(s)}\right) & -\frac{1}{(E+m)^2}\sum_{(s)}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\left(\chi^{(s)}\chi^{\dagger(s)}\right)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \end{pmatrix}$$

V vseh členih lahko izpostavimo izraz:

$$\sum_{(s)} \chi^{(s)}\chi^{(s)\,\dagger} = \chi^{\uparrow}\chi^{\dagger\uparrow}+\chi^{\downarrow}\chi^{\dagger\downarrow} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} = I;$$

V desnem spodnjem členu pa nam ostane:

$$(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p})^2 = (\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3)^2 = \sigma_1^2 p_1^2 + \cancel{\sigma_1 p_1 \sigma_2 p_2} + \cancel{\sigma_2 p_2 \sigma_1 p_1} + \cdots = \mathbf{p}^2;$$
$$\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2 = (E+m)(E-m)$$

Ko matrične elemente množimo z normirnim členom, dobimo:

$$\sum_{(s)} \bar{u}(p)u(p) = \begin{pmatrix} E+m & -\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}c & -(E-m)\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I\end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I\end{pmatrix} - \mathbf{p}\begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} =$$
$$= mI + E\gamma^0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\gamma} = mI + (p\cdot\gamma) = m + \not{p};$$

uporabili smo

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \boldsymbol{\gamma} = \beta\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0\end{pmatrix} \quad \text{ter} \quad \gamma^{\mu} = (\beta, \boldsymbol{\gamma})$$

- **Pokaži, da veljajo** naslednje relacije med matrikami:

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = 4I$$
$$\gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu = -2\not{a}$$
$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu = 4(a\cdot b)$$
$$\gamma_\mu\not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = -2\not{c}\not{b}\not{a}$$

a)

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = \gamma_0\gamma^0 - \sum_i \gamma_i\gamma_i$$

Za vektorski del uporabimo:

$$\gamma_i = \beta\alpha_i$$

Veljajo še antikomutacijske relacije:

$$\beta\alpha_i = -\alpha_i\beta$$

Torej:

$$(\beta\alpha_i)^2 = (\beta\alpha_i)(\beta\alpha_i) = -(\alpha_i\beta)(\beta\alpha_i) = -\alpha_i\beta^2\alpha_i = -\alpha_i^2 = -I$$

Torej bo:

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = \beta\beta - (-3I) = 4I$$

b) Uporabimo:

$$\gamma_\mu \not{a} = 2a_\mu - \not{a}\gamma_\mu$$

Tako bo:

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = 2a_\mu\gamma^\mu - \not{a}\gamma_\mu\gamma^\mu$$

in ob uporabi prejšnje identitete ter:

$$\not{a} = a_\mu\gamma^\mu = a^\mu\gamma_\mu$$

dobimo:

$$\gamma_\mu \not{a}\gamma^\mu = 2\not{a} - 4\not{a} = -2\not{a}$$

c)

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma^\mu = 2a_\mu \not{b}\gamma^\mu - \not{a}\gamma_\mu \not{b}\gamma^\mu$$

kjer smo uporabili identiteto iz prejšnje enačbe. Velja tudi:

$$\not{b}\gamma^\mu = 2b^\mu - \gamma^\mu \not{b}$$

kar uporabimo v prvem členu:

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\gamma^\mu = 2a_\mu \cdot 2b^\mu - 2a\mu\gamma^\mu \not{b} - \not{a}(-2\not{b}) = 4(ab)$$

d) Tu uporabimo še eno izpeljanko antikomutacijske relacije, namreč:

$$\not{a}\not{b} = 2(a \cdot b) - \not{b}\not{a}$$

Začnemo enako kot prej:

$$\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu = 2a_\mu \not{b}\not{c}\gamma^\mu - \not{a}\gamma_\mu \not{b}\not{c}\gamma^\mu$$

Uporabimo prejšnji rezultat in premaknemo še γ^μ:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu &= 2a_\mu \cdot 2c^\mu \not{b} - 2a_\mu \not{b}\gamma^\mu \not{c} - 4\not{a}(b \cdot c) \\
&= 4(a \cdot c)\not{b} - 2a_\mu \cdot 2b^\mu \not{c} - 2a_\mu\gamma^\mu \not{b}\not{c} - 4\not{a}(b \cdot c) \\
&= 4(a \cdot c)\not{b} - 4(a \cdot b)\not{c} - 2\not{a}\not{b}\not{c} - 4\not{a}(b \cdot c)
\end{aligned}$$

Začnemo na koncu in iz zadnjih dveh členov izpostavimo $\not{a}$ na levi, potem $\not{b}$ na desni in na koncu še $\not{c}$ na levi:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \not{a}\not{b}\not{c}\gamma^\mu &= 4(a\cdot c)\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c} - 2\not{a}\big(\not{b}\not{c} - 2(b\cdot c)\big)\\
&= 4(a\cdot c)\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c} - 2\not{a}\big(\not{c}\not{b}\big)\\
&= 4(a\cdot c)\not{b} - 2\not{a}\not{c}\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c}\\
&= 2\big(2(a\cdot c) - \not{a}\not{c}\big)\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c}\\
&= 2\big(\not{c}\not{a}\big)\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c}\\
&= 2\not{c}\not{a}\not{b} - 4(a\cdot b)\not{c}\\
&= 2\not{c}\big(\not{a}\not{b} - 2(a\cdot b)\big)\\
&= -2\not{c}\big(\not{b}\not{a}\big) = -2\not{c}\not{b}\not{a}
\end{aligned}$$

- $\boxed{\text{\textbf{Kakšen pa je diferencialni sipalni presek} (nepolariziran) za enak proces } (e^-e^- \to e^-e^-) \text{ v relativistični limiti?}}$

$$\mathcal{M} = -e^2\left[\frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)}{(p_Ac - p_Cc)^2} - \frac{(\bar{u}_D\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_C\gamma^\mu u_B)}{(p_Ac - p_Dc)^2}\right]$$

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{(2s_A+1)(2s_B+1)}\sum_{\text{spini delcev}} \mathcal{M}\mathcal{M}^* =\\
&= \frac{e^4}{4}\Bigg[\sum_{\text{spini}} \frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)(\bar{u}_C\gamma_\nu u_A)^*(\bar{u}_D\gamma^\nu u_B)^*}{(p_A-p_C)^4} -\\
&\quad - \sum_{\text{spini}} \frac{(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)(\bar{u}_D\gamma_\nu u_A)^*(\bar{u}_C\gamma^\nu u_B)^*}{(p_A-p_C)^2(p_A-p_D)^2} -\\
&\quad - I_2(C\leftrightarrow D) + I_1(C\leftrightarrow D)\Bigg];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1 &= I_1(p_A - p_C)^4\\
&= \sum_{\text{spini}}(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)(\bar{u}_C\gamma_\nu u_A)^*(\bar{u}_D\gamma^\nu u_B)^*;\\
S_2 &= I_2(p_A-p_C)^2(p_A-p_D)^2\\
&= \sum_{\text{spini}}(\bar{u}_C\gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu u_B)(\bar{u}_D\gamma_\nu u_A)^*(\bar{u}_C\gamma^\nu u_B)^*;
\end{aligned}$$

$$(\bar{u}_1\gamma_\mu u_2)^* = ((u_1^\dagger\gamma_0)\gamma_\mu u_2)^\dagger = u_2^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 u_1 = (u_2^\dagger\gamma_0)(\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0)u_1 = \bar{u}_2\gamma_\mu u_1;$$

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{\text{spini}} (\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)(\bar{u}_A \gamma_\nu u_C)(\bar{u}_B \gamma^\nu u_D) = \\
&= \sum_{\text{spini}} (\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_A \gamma_\nu u_C)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)(\bar{u}_B \gamma^\nu u_D) = \\
&= \sum_{\text{spini}} ((\bar{u}_C)_\alpha (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} (u_A)_\beta (\bar{u}_A)_\delta (\gamma_\nu)_{\delta\epsilon} (u_C)_\epsilon) \; \cdot \\
&\cdot \;\; ((\bar{u}_D)_\rho (\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (u_B)_\sigma (\bar{u}_B)_\omega (\gamma^\nu)_{\omega\tau} (u_D)_\tau) = \\
&= \sum_{\text{spini}} ((u_C)_\epsilon (\bar{u}_C)_\alpha (u_A)_\beta (\bar{u}_A)_\delta (\gamma_\nu)_{\delta\epsilon}) \; \cdot \\
&\cdot \;\; ((u_D)_\tau (\bar{u}_D)_\rho (\gamma^\mu)_{\rho\sigma} (u_B)_\sigma (\bar{u}_B)_\omega (\gamma^\nu)_{\omega\tau}) = \\
&= \Big(\sum_{\text{spini,C}} u_C \bar{u}_C \Big)_{\epsilon\alpha} \Big(\gamma_\mu \Big)_{\alpha\beta} \Big(\sum_{\text{spini,A}} u_A \bar{u}_A \Big)_{\beta\delta} \Big(\gamma_\nu \Big)_{\delta\epsilon} \cdot \\
&= \Big(\sum_{\text{spini,D}} u_D \bar{u}_D \Big)_{\tau\rho} \Big(\gamma^\mu \Big)_{\rho\sigma} \Big(\sum_{\text{spini,B}} u_B \bar{u}_B \Big)_{\sigma\omega} \Big(\gamma^\nu \Big)_{\omega\tau} = \\
&= \Big((\not{p_C} + m)\gamma_\mu (\not{p_A} + m)\gamma_\nu \Big)_{\epsilon\epsilon} \Big((\not{p_D} + m)\gamma^\mu (\not{p_B} + m)\gamma^\nu \Big)_{\tau\tau} = \\
&= \mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m)\gamma_\mu (\not{p_A} + m)\gamma_\nu \Big] \mathrm{Tr}\Big[(\not{p_D} + m)\gamma^\mu (\not{p_B} + m)\gamma^\nu \Big] = \Big|_{p \gg m} \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\not{p_C}\, \gamma_\mu \, \not{p_A}\, \gamma_\nu \Big] \cdot \mathrm{Tr}\Big[\not{p_D}\, \gamma^\mu \, \not{p_B}\, \gamma^\nu \Big] = \\
&= 4\Big(p_{C\mu} p_{A\nu} - (p_A \cdot p_C) g_{\mu\nu} + p_{C\nu} p_{A\mu} \Big) \cdot \\
&\cdot \;\; 4\Big(p_D^\mu p_B^\nu - (p_B \cdot p_D) g^{\mu\nu} + p_D^\nu p_B^\mu \Big) = \\
&= 32\Big((p_A \cdot p_B)(p_C \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C) \Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\text{spini}} (\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)(\bar{u}_A \gamma_\nu u_D)(\bar{u}_B \gamma^\nu u_C) = \\
&= \sum_{\text{spini}} (\bar{u}_C \gamma_\mu u_A)(\bar{u}_A \gamma_\nu u_D)(\bar{u}_D \gamma^\mu u_B)(\bar{u}_B \gamma^\nu u_C) = \\
&= \mathrm{Tr}\Big[\not{p_C}\, \gamma_\mu \, \not{p_A}\, \gamma_\nu \; (\not{p_D}\, \gamma^\mu) \; \not{p_B}\, \gamma^\nu \Big];
\end{aligned}
$$

Uporabimo:

$$
\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}
$$

za

$$
\mathrm{Tr}\Big[\not{p_C} \Big(\gamma_\mu \, \not{p_A}\, \gamma_\nu \, \not{p_D}\, \gamma^\mu \Big) \not{p_B}\, \gamma^\nu \Big] = -2\mathrm{Tr}\Big[\not{p_C} \Big(\not{p_D}\, \gamma_\nu \, \not{p_A} \Big) \not{p_B}\, \gamma^\nu \Big];
$$

pa še:

$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4(a \cdot b)$$

tako da imamo:

$$-2\mathrm{Tr}\Big[\not{p_C}\not{p_D}\Big(\gamma_\nu \not{p_A}\not{p_B}\gamma^\nu\Big)\Big] = -8(p_A{\cdot}p_B)\mathrm{Tr}\Big[\not{p_C}\not{p_D}\Big] = -32(p_A{\cdot}p_B)(p_C{\cdot}p_D)$$

V CMS bo:

$$\begin{aligned} p_A &= (E/c, \mathbf{p}) \qquad & p_B &= (E/c, -\mathbf{p}) \qquad & p = |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = E \\ p_C &= (E/c, \mathbf{p}') \qquad & p_D &= (E/c, -\mathbf{p}') \end{aligned}$$

Skalarni produkti bodo:

$$\begin{aligned} (p_A - p_C)^2 &= (E-E)^2 - (\mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 = -2E^2 + 2E^2\cos\theta = -2E^2(1-\cos\theta) \\ (p_A - p_D)^2 &= -2E^2(1+\cos\theta) \\ (p_A \cdot p_B) &= (p_C \cdot p_D) = E^2 + E^2 = 2E^2 \\ (p_A \cdot p_C) &= (p_B \cdot p_D) = E^2(1-\cos\theta) \\ (p_A \cdot p_D) &= (p_B \cdot p_C) = E^2(1+\cos\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{32\mathrm{e}^4}{4}\left[\frac{(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C) + (p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}{(p_A-p_C)^4} + \frac{(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}{(p_A-p_C)^2(p_A-p_D)^2} + (C\leftrightarrow D)\right] = \\ &= 2\mathrm{e}^4\left[\frac{4+(1+\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)^2} + 2\frac{4}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} + \frac{4+(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)^2}\right] \end{aligned}$$

17. maj 2011

- Določi sipalni presek za reakcijo $e^-\nu_\mu \to \mu^-\nu_e$ v relativistični limiti! [A=e$^-$, B=ν_μ, C=ν_e, D=μ^-. Upoštevamo q^2=(p$_A$-p$_C$)^2=-2E$_A$E$_C$(1-cosθ) v CMS, z E$_A \gg m_e c^2$. Ker bo skoraj vedno veljalo E$_A$, E$_C \ll$ M$_W^2$, bo propagator za šibki bozon kar -ig$^{\mu\nu}$/M$_W^2$, G=$\sqrt{2}(4\pi\alpha)$/8M$_W^2$. Tudi mion je v prvem približku kar brez mase - delamo torej v energijskem območju med 100 Mev in 90 Gev. Rabimo še . $\gamma_0\gamma^x\gamma_0 = -\gamma^x$ za x=(μ,5) in

$\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0 = \gamma_\mu$ ter $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$.

$$-i\mathcal{M} = \left(i\frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{2}}\right)(\bar{u}_C\gamma_\mu\frac{1}{2}(1\pm\gamma^5)u_A)\left(\frac{ig^{\mu\nu}}{M_W^2}\right)\left(i\frac{\sqrt{4\pi\alpha}}{\sqrt{2}}\right)(\bar{u}_D\gamma_\nu\frac{1}{2}(1\pm\gamma^5)u_B)$$

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi\alpha^2}{8M_W^2}(\bar{u}_C\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u_B)$$

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{\text{spin(A,B,C,D)}}\mathcal{M}\mathcal{M}^* = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\text{spin(A,B,C,D)}}\frac{G^2}{2}(\bar{u}_C\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A)(\bar{u}_D\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u_B)\;\cdot \\
&\cdot\;(\bar{u}_C\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u_A)^*(\bar{u}_D\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u_B)^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{u}_1\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_2)^* &= (u_1^\dagger\gamma_0\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_2)^\dagger = u_2^\dagger(1\pm\gamma^5)^\dagger\gamma_\mu^\dagger\gamma_0^\dagger u_1 = \\
&= u_2^\dagger\gamma_0\gamma_0(1\pm\gamma^5)\gamma_0\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0\gamma_0 u_1 = \bar{u}_2(1\mp\gamma^5)\gamma_\mu u_1 = \\
&= \bar{u}_2\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2}\sum_{\text{spin(A,B,C,D)}}\frac{G^2}{2}(\bar{u}_C\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A)(\bar{u}_A\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u_C)\;\cdot \\
&\cdot(\bar{u}_D\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)u_B)(\bar{u}_B\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)u_D) = \\
&= \frac{G^2}{4}\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)\,\not{p_A}\,\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)\big]\;\cdot \\
&\cdot\mathrm{Tr}\big[\not{p_B}\,\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)\,\not{p_D}\,\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)\,\not{p_A}\,\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)\big] = \mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\big] + \mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\gamma^5\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\gamma^5\big]\;\pm \\
&\quad\pm\;\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\gamma^5\big]\pm\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\gamma^5\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\big] = \\
&\quad= 2\Bigg(\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\big]\pm\mathrm{Tr}\big[\not{p_C}\,\gamma_\mu\,\not{p_A}\,\gamma_\nu\gamma^5\big]\Bigg) = \\
&\quad= 8\big[p_{A\mu}p_{C\nu} - (p_A\cdot p_C)g_{\mu\nu} + p_{A\nu}p_{C\mu}\pm i\epsilon_{\alpha\mu\beta\nu}p_C^\alpha p_A^\beta\big] = \\
&\quad= 8\big[p_{A\mu}p_{C\nu} - (p_A\cdot p_C)g_{\mu\nu} + p_{A\nu}p_{C\mu}\pm i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_A^\alpha p_C^\beta\big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\bar{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{G^2}{4}64\big[p_{A\mu}p_{C\nu} - (p_A\cdot p_C)g_{\mu\nu} + p_{A\nu}p_{C\mu}\pm i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_A^\alpha p_C^\beta\big]\;\cdot \\
&\cdot\;\big[p_B^\mu p_D^\nu - (p_B\cdot p_D)g^{\mu\nu} + p_B^\nu p_D^\mu \pm i\epsilon^{\mu\nu\delta\phi}p_{B\delta}p_{D\phi}\big] = \\
&= \frac{G^2}{4}64\big[2(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D) + 2(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C) - \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\delta\phi}p_A^\alpha p_C^\beta p_{B\delta}p_{D\phi}\big] = \\
&= \frac{G^2}{4}64\big[2(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D) + 2(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C) + 2(\delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\phi - \delta_\alpha^\phi\delta_\beta^\delta)p_A^\alpha p_C^\beta p_{B\delta}p_{D\phi}\big] = \\
&= \frac{G^2}{4}256(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D) = 64G^2(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)
\end{aligned}$$

$$p_A = (E/c, \mathbf{p}) \quad p_B = (E/c, -\mathbf{p}) \quad p_C = (E/c, \mathbf{p}') \quad p_D = (E/c, -\mathbf{p}')$$
$$p = |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| = E/c;\ (p_A \cdot p_B) = \frac{E^2}{c^2} + p^2 = 2\frac{E^2}{c^2} = (p_C \cdot p_D)$$
$$s = (2E)^2 \ \rightarrow\ |\bar{\mathcal{M}}|^2 = 16G^2 s^2$$
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\bar{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s} = \frac{G^2 s}{4\pi^2}$$
$$\sigma = \frac{G^2 s}{\pi} = \frac{G^2 s(\hbar c)^2}{\pi} = \frac{(1.16\ 10^{-5} 0.197)^2}{\pi}\frac{s}{\mathrm{GeV}^2}\mathrm{fm}^2 =$$
$$= 1.66 \times 10^{-14}\frac{s}{\mathrm{GeV}^2}\mathrm{barn}$$

- **Kakšna bo verjetnost** za razpad piona, $\pi \rightarrow \mu\bar{\nu}_\mu$? [Vzamemo $\langle 0|\bar{v}_u\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_d|\pi\rangle = \mathrm{i} f_\pi \mathrm{p}_\mu$, upoštevamo $\bar{u}(\not{p} - m) = 0$, $\not{p} + m)v = 0$, oz. $\bar{u}\not{p} = m\bar{u}$ in $\not{p}v = mv$

$$\mathcal{M} = -\frac{G}{\sqrt{2}}\langle 0|\bar{v}_u\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_d|\pi\rangle(\bar{u}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_\nu)$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi(p_A + p_B)_\mu(\bar{u}_C\gamma^\mu(1-\gamma^5)v_D) =$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi(\bar{u}_C(\not{p}_A + \not{p}_B)\ (1-\gamma^5)v_D) =$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi(\bar{u}_C(\not{p}_C + \not{p}_D)\ (1-\gamma^5)v_D) =$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi\Big(\ (\bar{u}_C\ \not{p}_C)\ (1-\gamma^5)v_D\Big) - i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi\Big(\bar{u}_C\ \not{p}_D\ (1-\gamma^5)v_D\Big) =$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi m_C\Big(\bar{u}_C(1-\gamma^5)v_D\Big) - i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi\Big(\bar{u}_C(1+\gamma^5)\ (\not{p}_D v_D)\ \Big) =$$
$$= -i\frac{G}{\sqrt{2}}f_\pi m_C\Big(\bar{u}_C(1-\gamma^5)v_D\Big)$$

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{1}\sum_{\mathrm{spin(C,D)}}\mathcal{M}\mathcal{M}^* =$$
$$= \sum_{\mathrm{spin(C,D)}}\frac{G^2}{2}f_\pi^2 m_C^2(\bar{u}_C(1-\gamma^5)v_D)(\bar{u}_C(1-\gamma^5)v_D)^*$$

$$(\bar{u}_1(1-\gamma^5)v_2)^* = (u_1^\dagger\gamma_0(1-\gamma^5)v_2)^\dagger = v_2^\dagger(1-\gamma^5)^\dagger\gamma_0^\dagger u_1 =$$
$$= v_2^\dagger\gamma_0\gamma_0(1-\gamma^5)\gamma_0 u_1 = \bar{v}_2(1+\gamma^5)u_1$$

$$|\bar{\mathcal{M}}|^2 = \sum_{\mathrm{spin(C,D)}}\frac{G^2}{2}f_\pi^2 m_C^2(\bar{u}_C(1-\gamma^5)v_D)(\bar{v}_D(1+\gamma^5)u_C) =$$
$$= \frac{G^2}{2}f_\pi^2 m_C^2\mathrm{Tr}\Big[(\not{p}_C + m_C)(1-\gamma^5)\ \not{p}_D(1+\gamma^5)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m_C)(1-\gamma^5)\not{p_D}(1+\gamma^5)\Big] &= \mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m_C)(1-\gamma^5)^2\not{p_D}\Big] = \\
&= 2\mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m_C)(1-\gamma^5)\not{p_D}\Big] = \\
&= 2\mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m_C)\not{p_D}\Big] - 2\mathrm{Tr}\Big[(\not{p_C} + m_C)\gamma^5\not{p_D}\Big] = 2\mathrm{Tr}\Big[\not{p_C}\not{p_D}\Big] = \\
&= 8(p_C \cdot p_D)
\end{aligned}
$$

$$
|\bar{\mathcal{M}}|^2 = 4G^2 f_\pi^2 m_C^2 (p_C \cdot p_D)
$$

Fazni prostor:

$$
dQ = \frac{d^3\mathbf{p_C} d^3\mathbf{p_D}}{(2\pi)^3(2\pi)^3 2E_C\ 2E_D}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p - p_C - p_D)
$$

integral po $\mathbf{p}_D$ z delta funkcijo

$$
dQ = \frac{d^3\mathbf{p_C}}{(2\pi)^2 2E_C\ 2E_D}\delta(E - E_C - E_D)
$$

V težiščnem sistemu: $\mathbf{p}_C$=$\mathbf{p}$, p=|$\mathbf{p}$|, p_C=(E_C/c,$\mathbf{p}$), p_D=(E_D/c,-$\mathbf{p}$)

$$
\begin{aligned}
E =& E_C + E_D = \sqrt{m_C^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m_D^2 c^4 + p^2 c^2} \\
\frac{dE}{dp} &= \frac{pc^2}{E_C} + \frac{pc^2}{E_D}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
dQ &= \frac{d^3\mathbf{p_C}}{(2\pi)^2 2E_C\ 2E_D}\delta(E - E_C - E_D) = \\
&= \frac{p^2 dp d\Omega}{(2\pi)^2 2E_C 2E_D}\delta(E - E_C - E_D) \\
&= \frac{p^2 dE d\Omega}{(2\pi)^2 2E_C 2E_D (dE/dp)}\delta(E - E_C - E_D) = \\
&= \frac{p^{\cancel{2}} E d\Omega}{(2\pi)^2 4\cancel{p}(E_C + E_D)}\delta(E - E_C - E_D) = \\
&= \frac{p d\Omega}{16\pi^2 E} \\
F &= 2E
\end{aligned}
$$

Ker razpade pion, bo E=m$_\pi$, ostalo pa:

$$\sqrt{p^2c^2 + m_C^2c^4} = m_\pi c^2 - pc$$

$$m_C^2c^4 = m_\pi^2c^4 - 2m_\pi c^2pc \;\rightarrow\; pc = \frac{m_\pi^2c^4 - m_C^2c^4}{2m_\pi c^2}$$

$$E_C = m_\pi c^2 - pc = m_\pi c^2 - \frac{m_\pi^2c^4 - m_C^2c^4}{2m_\pi c^2} = \frac{m_\pi^2c^4 + m_C^2c^4}{2m_\pi c^2}$$

$$(p_C \cdot p_D) = \frac{E_CE_D}{c^2} + p^2 = \frac{1}{c^2}\frac{m_\pi^2c^4 - m_C^2c^4}{2}$$

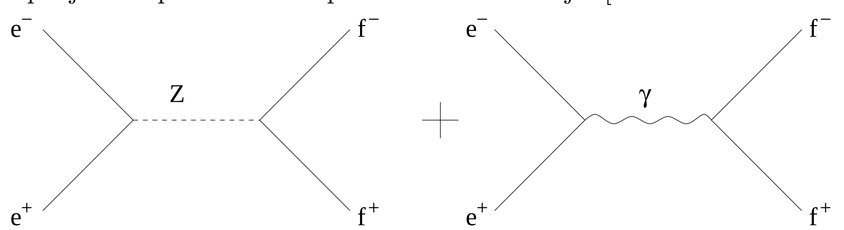
$$\begin{aligned}
d\Gamma &= \frac{pc|\bar{\mathcal{M}}|^2 d\Omega}{32\pi^2 m_\pi^2 c^4} = \\
&= \frac{m_\pi^2c^4 - m_C^2c^4}{2m_\pi c^2} 4G^2 f_\pi^2 m_C^2 \frac{m_\pi^2c^4 - m_C^2c^4}{2}\frac{(\hbar c)^2}{32\pi^2 m_\pi^2 c^4} d\Omega = \\
&= \frac{G^2 f_\pi^2 m_C^2 m_\pi c^2}{32\pi^2}\left(1 - \frac{m_C^2}{m_\pi^2}\right)^2 d\Omega \\
\Gamma &= \frac{G^2 f_\pi^2 m_C^2 c^4 m_\pi c^2}{8\hbar\pi}\left(1 - \frac{m_C^2}{m_\pi^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Primerjava elektronov in mionov:

$$\frac{\Gamma(\pi \;\rightarrow\; e^-\bar{\nu_e})}{\Gamma(\pi \;\rightarrow\; \mu^-\bar{\nu_\mu})} = \frac{m_e^2}{m_\mu^2}\left(\frac{m_\pi^2 - m_e^2}{m_\pi^2 - m_\mu^2}\right)^2 = 1.28 \times 10^{-4}$$

24. maj

- **Razpad piona**, glej naloge za prejšnji teden.
- **Asimetrija naprej-nazaj**. Povej, kakšen je delež mionov (fermionov f), ki se po trku elektrona in pozitrona gibljejo naprej? Upoštevaj, da gre sipanje tako preko EM kot preko šibke interakcije. [



Sipalna amplituda je vsota EM in šibkega grafa.

$$\mathcal{M}_\gamma = -(4\pi\alpha)\Big(\bar{v}_B\gamma_\mu u_A\Big)\left(\frac{1}{q^2}\right)\Big(\bar{u}_C\gamma^\mu v_D\Big)$$

$$\mathcal{M}_\mathcal{Z} = \sqrt{2}GM_Z^2\Big(\bar{v}_B\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u_A\Big)\left(\frac{g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu/M_Z^2}{q^2 - M_Z^2}\right)\Big(\bar{u}_C\gamma_\nu(c_V - c_A\gamma^5)v_D\Big)$$

za q=p$_A$+p$_B$=p$_C$+p$_D$. Gledamo q$\gg$m$_e$,m$_\mu$ bo $\not{q}$ u$_{A,B,C,D}$=mu$_{A,B,C,D}$=0 in Z propagatorju ostane le g$^{\mu\nu}$:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{Z}} = \frac{\sqrt{2}GM_Z^2}{q^2 - M_Z^2}\Big(\bar{v}_B\gamma_\mu(c_V - c_A\gamma^5)u_A\Big)\Big(\bar{u}_C\gamma^\mu(c_V - c_A\gamma^5)v_D\Big)$$

Pišemo c$_L$=c$_V$-c$_A$ in c$_R$=c$_V$+c$_A$, dobimo:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{\mathcal{Z}} = &\Big(c_L^A(\bar{v}_{B,R}\gamma_\mu u_{A,L}) + c_R^A(\bar{v}_{B,L}\gamma_\mu u_{A,R})\Big)\\ &\Big(c_L^C(\bar{u}_{C,L}\gamma^\mu v_{D,R}) + c_R^C(\bar{u}_{C,R}\gamma^\mu v_{D,L})\Big) =\\ = &\frac{\sqrt{2}GM_Z^2}{q^2 - M_Z^2}\Big(c_L^A I_-^A + c_R^A I_+^A)(c_L^C I_-^C + c_R^C I_+^C)\end{aligned}$$

Ko dodamo še EM, bo:

$$\begin{aligned}\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_{\mathcal{Z}} = -\frac{4\pi\alpha}{q^2}\Bigg[&\Big(I_-^A + I_+^A)(I_-^C + I_+^C)\Big) +\\ &+ r\Big(c_L^A I_-^A + c_R^A I_+^A)(c_L^C I_-^C + c_R^C I_+^C)\Big)\Bigg]\\ r = \frac{\sqrt{2}GM_Z^2 q^2}{4\pi\alpha(q^2 - M_Z^2)}&\end{aligned}$$

Za sledi opazimo še (pazi, $(1-\gamma^5)^2$=$2(1-\gamma^5)$!

$$\begin{aligned}I_-^A &= (\bar{v}_{B,R}\gamma_\mu u_{A,L}) = \frac{1}{4}\bar{v}_B(1+\gamma^5)\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_A \quad = \frac{1}{2}\bar{v}_B\gamma_\mu(1-\gamma^5)u_A =\\ I_\pm^A &= \frac{1}{2}\bar{v}_B\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A\\ I_\pm^C &= \frac{1}{2}\bar{u}_C\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)v_D\end{aligned}$$

Velikost matričnega elementa bo:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}\mathcal{M}^* = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2\Bigg[&I_-^A I_-^{A*} I_-^C I_-^{C*}|1 + rc_L^A c_L^C|^2 +\\ &I_-^A I_-^{A*} I_+^C I_+^{C*}|1 + rc_L^A c_R^C|^2 + I_+^A I_+^{A*} I_-^C I_-^{C*}|1 + rc_R^A c_L^C|^2 +\\ &I_+^A I_+^{A*} I_+^C I_+^{C*}|1 + rc_R^A c_R^C|^2\Bigg]\end{aligned}$$

Manjkajoči členi so (hkrati so podani tudi mešani členi, ki odpadejo v zgornjem izrazu):

$$
\begin{aligned}
I^A_\pm I^{A*}_\pm &= \frac{1}{4}(\bar{v}_B\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A)(\bar{v}_B\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)u_A)^* \\
&= \frac{1}{4}(\bar{v}_B\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)u_A)(\bar{u}_A\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)v_B) = \\
&= \frac{1}{4}\mathrm{Tr}[\not{p}_B\gamma_\mu(1\pm\gamma^5)\not{p}_A\gamma_\nu(1\pm\gamma^5)] = \\
&= 2[p_{A\mu}p_{B\nu}+p_{A\nu}p_{B\mu}-g_{\mu\nu}(p_A\cdot p_B)\pm i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_A^\alpha p_B^\beta] \\
I^A_+ I^{A*}_- &= I^A_- I^{A*}_+ = 0 \\
I^C_\pm I^{C*}_\pm &= \frac{1}{4}(\bar{u}_C\gamma^\mu(1\pm\gamma^5)v_D)(\bar{u}_C\gamma^\nu(1\pm\gamma^5)v_D)^* = \\
&= 2[p_C^\mu p_D^\nu + p_C^\nu p_D^\mu - g^{\mu\nu}(p_C\cdot p_D)\mp i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_{C\alpha}p_{D\beta}] \\
I^C_+ I^{C*}_- &= I^C_- I^{C*}_+ = 0
\end{aligned}
$$

Za enako polarizirane delce (recimo $e_L \to \mu_L$) bomo dobili produkt:

$$
\begin{aligned}
I^A_- I^{A*}_- I^C_- I^{C*}_- &= 4\Big[p_{A\mu}p_{B\nu}+p_{A\nu}p_{B\mu}-g_{\mu\nu}(p_A\cdot p_B)-i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_A^\alpha p_B^\beta\Big]\cdot \\
&\cdot\Big[p_C^\mu p_D^\nu + p_C^\nu p_D^\mu - g^{\mu\nu}(p_C\cdot p_D)+i\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}p_{C\sigma}p_{D\tau}\Big] = \\
&= 4\Big[(p_A\cdot p_C)(p_B\cdot p_D)+(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)-\cancel{(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}+ \\
&+ (p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)+(p_A\cdot p_C)(p_B\cdot p_D)-\cancel{(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}- \\
&- \cancel{(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}-\cancel{(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}+\cancel{4(p_A\cdot p_B)(p_C\cdot p_D)}+ \\
&+ \cancel{i(\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}+\epsilon^{\nu\mu\sigma\tau})p_{A\mu}p_{B\nu}}p_{C\sigma}p_{D\tau}+\cancel{i\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}g_{\mu\nu}(p_A\cdot p_B)}p_{C\sigma}p_{D\tau}+ \\
&+ \cancel{i(\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}+\epsilon_{\nu\mu\alpha\beta})}p_A^\alpha p_B^\beta p_C^\mu p_D^\nu+\cancel{i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}g^{\mu\nu}(p_C\cdot p_D)}p_A^\alpha p_B^\beta+ \\
&+ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}p_A^\alpha p_B^\beta p_{C\sigma}p_{D\tau}\Big] = \\
&= 4\Big[2(p_A\cdot p_C)(p_B\cdot p_D)+2(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)+ \\
&+ (-2\delta^\sigma_\alpha\delta^\tau_\beta+2\delta^\tau_\alpha\delta^\sigma_\beta)p_A^\alpha p_B^\beta p_{C\sigma}p_{D\tau}\Big] = \\
&= 4\Big[2(p_A\cdot p_C)(p_B\cdot p_D)+2(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)- \\
&- 2(p_A\cdot p_C)(p_B\cdot p_D)+2(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)\Big] = \\
&= 16(p_A\cdot p_D)(p_B\cdot p_C)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) &= 16\pi^2\alpha^2 \frac{16(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C)}{q^4} |1 + r c_L^e c_L^\mu|^2 \\
\mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+) &= 16\pi^2\alpha^2 \frac{16(p_A \cdot p_C)(p_B \cdot p_D)}{q^4} |1 + r c_L^e c_R^\mu|^2 \\
\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) &= \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+) \frac{|1 + r c_R^e c_L^\mu|^2}{|1 + r c_L^e c_R^\mu|^2} \\
\mathcal{M}(e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+) &= \mathcal{M}(e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) \frac{|1 + r c_R^e c_R^\mu|^2}{|1 + r c_L^e c_L^\mu|^2}
\end{aligned}
$$

Določimo še skalarne produkte v CMS in pretvorimo v $d\sigma/d\Omega$

$$
\begin{aligned}
q^2 = (p_A + p_B)^2 &= 4\left(\frac{E}{c}\right)^2 \\
(p_A \cdot p_C) = (p_B \cdot p_D) &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p}^2 \cos\theta = \left(\frac{E}{c}\right)^2 (1 - \cos\theta) \\
(p_A \cdot p_D) = (p_B \cdot p_C) &= \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \mathbf{p}^2 \cos\theta = \left(\frac{E}{c}\right)^2 (1 + \cos\theta) \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 (2E)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^- e_R^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) &= \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{16E^2} \Big(1 + \cos\theta\Big)^2 |1 + r c_L^e c_L^\mu|^2 \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_L^- e_R^+ \to \mu_R^- \mu_L^+) &= \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{16E^2} \Big(1 - \cos\theta\Big)^2 |1 + r c_L^e c_R^\mu|^2 \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \to \mu_L^- \mu_R^+) &= \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{16E^2} \Big(1 - \cos\theta\Big)^2 |1 + r c_R^e c_L^\mu|^2 \\
\frac{d\sigma}{d\Omega}(e_R^- e_L^+ \to \mu_R^- \mu_L^+) &= \frac{\alpha^2 (\hbar c)^2}{16E^2} \Big(1 + \cos\theta\Big)^2 |1 + r c_R^e c_R^\mu|^2
\end{aligned}
$$

Povprečimo po 4 možnih vhodnih ročnostih, da dobimo nepolariziran presek, ter ga izrazimo kot $\mathrm{A}_0(1+\cos^2\theta)+\mathrm{A}_1\cos\theta$ za elektrone in mione (tu sta c_L^A=c_L^C in enako za R komponente!

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16E^2}\frac{1}{4}\Bigg[\Big(1+\cos\theta\Big)^2(|1+rc_L^2|^2+|1+rc_R^2|^2)+\\
&+2\Big(1-\cos\theta\Big)^2|1+rc_Rc_L|^2\Bigg] =\\
&= \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16E^2}\frac{1}{4}\Bigg[\\
&\Big(1+\cos^2\theta\Big)\Big(|1+rc_L^2|^2+|1+rc_R^2|^2+2|1+rc_Rc_L|^2\Big)+\\
&+\cos\theta\Big(2|1+rc_L^2|^2+2|1+rc_R^2|^2-4|1+rc_Rc_L|^2\Big)\Bigg] =\\
&= \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16E^2}\Big(A_0(1+\cos^2\theta)+A_1\cos\theta\Big)
\end{aligned}$$

Ker je samo r lahko imaginaren (v bližini M_Z dodamo še razpadno konstanto za šibki bozon, $\frac{1}{q^2-M_Z^2}\rightarrow\frac{1}{q^2-M_Z^2+iM_Z\Gamma}$, bo veljalo:

$$\begin{aligned}
|1+rc_R^2|^2 &= (1+rc_R^2)(1+r^*c_R^2) = 1+2\mathrm{Re}(r)c_R^2+|r^2|c_R^4\\
|1+rc_L^2|^2 &= 1+2\mathrm{Re}(r)c_L^2+|r^2|c_L^4\\
|1+rc_Rc_L|^2 &= 1+2\mathrm{Re}(r)c_Lc_R+|r^2|c_R^2c_L^2
\end{aligned}$$

Tako bo:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{4}\Big(|1+rc_L^2|^2+|1+rc_R^2|^2+2|1+rc_Rc_L|^2\Big) =\\
&= 1+\frac{1}{2}\mathrm{Re}(r)(c_L+c_R)^2+\frac{1}{4}|r|^2(c_L^2+c_R^2)^2 =\\
&= 1+2\mathrm{Re}(r)c_V^2+|r|^2(c_A^2+c_V^2)^2\\
A_1 &= \frac{1}{4}\Big(2|1+rc_L^2|^2+2|1+rc_R^2|^2-4|1+rc_Rc_L|^2\Big) =\\
&= \mathrm{Re}(r)(c_L-c_R)^2+\frac{|r|^2}{2}(c_L^2-c_R^2)^2 =\\
&= 4\mathrm{Re}(r)c_A^2+8|r|^2c_A^2c_V^2
\end{aligned}$$

Poglejmo neravnovesje med sipanjem naprej (θ med 0 in $\pi/2$) in sipanjem nazaj ($\theta > \pi/2$).

$$\begin{aligned}
\sigma_F &= \int_0^1 \frac{d\sigma}{d\Omega}d(cos\theta) = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16E^2}\Big(\frac{4}{3}A_0+\frac{A_1}{2}\Big)\\
\sigma_B &= \int_{-1}^0 \frac{d\sigma}{d\Omega}d(cos\theta) = \frac{\alpha^2(\hbar c)^2}{16E^2}\Big(\frac{4}{3}A_0-\frac{A_1}{2}\Big)
\end{aligned}$$

Neravnovesje:

$$A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} = \frac{A_1}{8/3A_0} = \frac{3A_1}{8A_0}$$

Pri majhnih energijah bo $A_0 \approx 1$, $A_1 \approx 4rc_A^2$, r$\approx \frac{\sqrt{2}G(2E)^2}{4\pi\alpha(\hbar c)^3}$, tako da bomo izmerili asimetrijo:

$$A_{FB} = \frac{3}{8}\frac{4c_A^2}{1}\frac{\sqrt{2}G(2E)^2}{4\pi\alpha(\hbar c)^3} = \frac{3GE^2c_A^2}{\sqrt{2}\pi\alpha(\hbar c)^3} = 0.06 \ (E = 15 \text{ GeV})$$

31. maj

- **Asimetrija naprej-nazaj** od prejšnjega tedna.
- **Določi relativno razmerje** za verjetnosti razpadov $D^0 \to \pi^+\pi^-$, $D^0 \to K^+\pi^-$ in $D^0 \to \pi^+K^-$! Primerjaj z verjetnostmi za razpad $\bar{D}^0$ v ista stanja! Kvarkovski sestavi: mezon D^0 ($c\bar{u}$), mezon $\bar{D}^0$ ($\bar{c}u$).

  [

$$\Gamma(D^0 \to K^-\pi^+) \propto \cos^2\theta_C :$$
$$D^0(\mathrm{c\bar{u}}) \ \to^{\mathrm{c\to s}} \ K^-(\mathrm{s\bar{u}}) + W^+ \qquad \cos\theta_C$$
$$W^+ \ \to^{\mathrm{u\to d}} \ \pi^+(\mathrm{u\bar{d}}) \quad \cos\theta_C$$

$$\Gamma(D^0 \to \pi^+\pi^-) \propto \sin\theta_C\cos\theta_C :$$
$$D^0(\mathrm{c\bar{u}}) \ \to^{\mathrm{c\to d}} \ \pi^-(\mathrm{d\bar{u}}) + W^+ \qquad \sin\theta_C$$
$$W^+ \ \to^{\mathrm{u\to d}} \ \pi^+(\mathrm{u\bar{d}}) \quad \cos\theta_C$$

$$\Gamma(D^0 \to K^+\pi^-) =\propto \sin^2\theta_C :$$
$$D^0(\mathrm{c\bar{u}}) \ \to^{\mathrm{c\to d}} \ \pi^-(\mathrm{d\bar{u}}) + W^+ \qquad \sin\theta_C$$
$$W^+ \ \to^{\mathrm{u\to s}} \ K^+(\mathrm{u\bar{s}}) \quad \sin\theta_C$$

$$\Gamma(\bar{D}^0 \to K^-\pi^+) =\propto \sin^2\theta_C :$$
$$\bar{D}^0(\mathrm{u\bar{c}}) \ \to^{\mathrm{\bar{c}\to\bar{d}}} \ \pi^+(\mathrm{u\bar{d}}) + W^- \qquad \sin\theta_C$$
$$W^- \ \to^{\mathrm{u\to s}} \ K^-(\mathrm{s\bar{u}}) \quad \sin\theta_C$$

  Enako tudi za simetrični in K^+ kanal za $\bar{D}^0$. Vidimo, da nam bo naboj nastalega kaona K določal delčnost (oziroma antidelčnost) začetnega D mezona.]

- **Ob dani delni razpadni** verjetnosti $\Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu_e)$=2x10^6 s^{-1}, oceni delno razpadno verjetnost za razpad $\Gamma(D^0 \rightarrow K^- e^+ \nu_e)$!

  [Matrični element prepišemo iz sipanja mionskih nevtrinov na elektronih v mion in elektrnoski nevtrino - tokovi bodo v spektator modelu enaki, le spremenjeni kvark bomo križali s mionskim nevtrinom. Tako bo

$$\mathcal{M} = 64G^2(p_A \cdot p_B)(p_C \cdot p_D)$$

  p_A pripada vstopnemu kvarku/mezonu, p_C je izhajajoči kvark/mezon, p_B je nevtrino in p_D pozitron, torej $p_B^2 = m_B^2 = 0$. Delali bomo v sistemu v katerem A miruje, $p_A = (m_A, 0)$, kar da:

$$\begin{aligned} p_A &= p_B + p_C + p_D \\ (p_C + p_D)^2 &= p_C^2 + 2p_C p_D + p_D^2 = m_C^2 + m_D^2 + 2(p_C \cdot p_D) \\ (p_A - p_B)^2 &= p_A^2 + 2(p_A \cdot p_B) + p_B^2 = m_A^2 + 2m_A E_B \\ (p_C \cdot p_D) &= \frac{1}{2}(m_A^2 - m_C^2 - m_D^2 + 2m_A E_B) \\ (p_A \cdot p_B) &= m_A E_B \end{aligned}$$

  Integriramo po faznem prostoru, p_2 je velikost $|\mathbf{p}_B|$, podobno $p_3 = |\mathbf{p}_C|$ in $p_4 = |\mathbf{p}_D|$, ob m$_B$=0 velja še p$_2$=E$_B$

$$\begin{aligned} d\Gamma = &\frac{\mathcal{M}^2}{2m_A\hbar} \frac{d^3\mathbf{p}_B}{(2\pi)^3 2E_B} \frac{d^3\mathbf{p}_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3\mathbf{p}_D}{(2\pi)^3 2E_D} \\ &(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - p_B - p_C - p_D) = \\ = &\frac{\mathcal{M}^2}{2m_A(2\pi)^5\hbar 8E_B E_C E_D} d^3\mathbf{p}_B d^3\mathbf{p}_D \delta(E_A - E_B - E_C - E_D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^3\mathbf{p}_B &= p_2^2 dp_2 d(\cos\theta) 2\pi \\ E_C &= \sqrt{(\mathbf{p}_D + \mathbf{p}_B)^2 + m_C^2} = \sqrt{p_4^2 + p_2^2 + 2p_2p_4\cos\theta + m_C^2} \\ dE_C &= \frac{p_2 p_4 d(\cos\theta)}{E_C} \\ d^3\mathbf{p}_B &= 2\pi \frac{E_B dE_B E_C dE_C}{p_4} \\ d\Gamma &= \frac{64G^2 m_A}{16m_A(2\pi)^4\hbar} \frac{d^3\mathbf{p}_D}{p_4 E_D} \int_{E_-}^{E_+} E_B \frac{1}{2}(m_A^2 - m_C^2 - m_D^2 + 2m_A E_B)\, dE_B \end{aligned}$$

  Meje za integral, E$_-$ in E$_+$ dobimo tako, da zahtevamo ohranitev energije v δ funkciji, hkrati pa velja tudi enačba za E$_C$. Le-ta vsebuje člen s cosθ, ki je lahko kvečjemu -1, največ pa +1. Tako imamo E$_{C\pm}$=$\sqrt{(\mathbf{p}_B \pm \mathbf{p}_D)^2 + m_C^2}$ in $E_{C-} < E_A - E_B - E_D < E_{C+}$, od koder izračunamo meje za E$_B$=(E$_-$,E$_+$). Dobimo:

$$E_\pm = \frac{m_A^2 - m_C^2 - m_D^2 - 2m_A E_D}{2(m_A - E_D \pm p_4)}$$

Integral pa

$$
\begin{aligned}
J(E=E_D) &= \int_{E_-}^{E_+} E_B(m_A^2 - m_C^2 - m_D^2 + 2m_A E_B)\, dE_B = \\
&= \frac{1}{2}(m_A^2 - m_C^2 - m_D^2)(E_+^2 - E_-^2) - \frac{2}{3} m_A (E_+^3 - E_-^3)
\end{aligned}
$$

Upoštevamo še:

$$
\begin{aligned}
d^3\mathbf{p}_D &= 4\pi p_4^2 dp_4 = 4\pi p_4 E_D dE_D \\
\frac{d\Gamma}{dE_4} &= \frac{G^2}{2\pi^3\hbar} J(E_D)
\end{aligned}
$$

Za totalni presek še integriramo - integral najdemo v knjigi (ali izračunamo), dobimo $\int_{m_D}^{m_A-m_C} J(E_D)\, dE_D$=2/15(m$_A$-m$_C$)^5 za m$_D \ll m_A, m_C$, torej:

$$
\Gamma = \frac{G^2}{15\pi^3\hbar}(\Delta m)^5
$$

Upoštevajmo še Cabbibov kot! Pri K$^+ \to \pi^0$ se srečata s in u, torej sinθ_C, pri D^0 $\to$K$^+$ pa c in s, torej dodamo cosθ_C v matrični element. Dodati moramo še izospinske popravke, $\pi^0 = (u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$, ob s$\to$u dobimo samo enega od členov, zato popravimo sklopitev na sin$\theta_C/\sqrt{2}$. Skupaj bo torej:

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma(D^0 \to K^- e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)} &= \frac{2\Delta m_{DK}^5 \cos^2\theta_C}{\Delta m_{K\pi}^5 \sin^2\theta_C} \\
m_D &= 1869 \text{ MeV} \\
m_K &= 493 \text{ MeV} \\
m_\pi &= 140 \text{ MeV} \\
\sin\theta_C &= 0.23 \\
\cos\theta_C &= 0.973 \\
\frac{\Gamma(D^0 \to K^- e^+ \nu_e)}{\Gamma(K^+ \to \pi^0 e^+ \nu_e)} &= 3.2 \cdot 10^4 \\
\Gamma(D^0 \to K^- e^+ \nu_e) &= 6.4 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}
\end{aligned}
$$

1 Dodatki

1.1 Rutherfordovo sipanje

Klasično: Začnemo z Hamiltonovim principom - Integral razlike med kinetično energijo T in potencialom U po poti je najmanjši, kar nam definira Langrangian L. Za sipanje dveh delcev bomo imeli:

$$
L(\dot{\mathbf{r}}_1, \dot{\mathbf{r}}_2, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}m_1\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\mathbf{r}}_2^2 - \frac{k}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \tag{1}
$$

Prevedemo v nove spremenljivke $\mathbf{R} = (m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2)/(m_1 + m_2)$ in $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

$$L(\dot{\mathbf{R}}, \dot{\mathbf{r}}, \mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} \tag{2}$$

kjer smo že uporabili $|\mathbf{r}| = r$, notacijo v običajnem tisku za velikost vektorja v krepkem tisku. Uvedemo reducirano maso $\mu = m_1 m_2/(m_1+m_2)$ in opazimo, da je gibanje v $\mathbf{R}$ dokaj dolgočasno, saj je $\mathbf{R}$ ciklična spremenljivka, kar je drugo ime za dejstvo, da v L sam $\mathbf{R}$ ne nastopa eksplictino. Tako je $\dot{\mathbf{R}}$ konstanta gibanja, težišče sistema se bo gibalo s konstantno hitrostjo. Posebej rešujemo za $\mathbf{r}$:

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{k}{r} \tag{3}$$

Gremo v polarne koordinate, sistem zasukamo tako, da je začetna hitrost delca v ravnini xy - potem bo delec ves čas v tej ravnini in tretjo koordinato (ki je vedno 0) lahko ignoriramo. Vektor hitrosti bo razpadel na komponento vzdolž radija, $\dot{r}$ in vzdolž polarnega kota $\dot{\Theta}$. Zapisa v polarnih koordinatah, $x = r\cos\Theta$ in $y = r\sin\Theta$ vstavimo v velikost (kvadrata) odvoda:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\Theta}^2 \tag{4}$$

V Lagrangianu bomo dobilo novo ciklično spremenljivko, Θ in novo konstanto gibanja. Najprej L:

$$L(\dot{\mathbf{r}}, \mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\dot{\Theta}^2 - \frac{k}{r} \tag{5}$$

in potem ciklična spremenljivka:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dL}{d\dot{\Theta}}\right] = 0 \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mu r^2\dot{\Theta}\right] = 0 \tag{7}$$

$$\mu r^2\dot{\Theta} = l \tag{8}$$

Nova konstanta gibanja, l, je vrtilna količina. Hitrost $\dot{\Theta}$ lahko izrazimo z l, $\dot{\Theta} = l/\mu r^2$. Prav tako je konstanta gibanja energija E, ki je vsota kinetične in potencialne energije, E=U+T;

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2\mu r^2} + \frac{k}{r} \tag{9}$$

Ker je potencialna energija $\frac{k}{r}$ enaka 0, ko sta delca daleč vsaksebi (r$\to\infty$), je skupna energija sistema kar začenta kinetična energija T=μv^2/2 kjer je v velikost relativne hitrosti delcev, ko sta ta še daleč narazen. Iz zgornjega izraza dobimo $\dot{r}$ kot funkcijo razdalje r:

$$\dot{r} = \sqrt{2\frac{T - \frac{k}{r}}{\mu} - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}} \tag{10}$$

Mi bi bolj radi obliko tira, torej r(Θ), kar dobimo s prevedbo na nove spremenljivke dΘ=dΘ/dt$\cdot$dt/dr$\cdot$dr=$\dot{\Theta}/\dot{r}$dr. Uporabimo $\dot{\Theta} = l/\mu r^2$, da dobimo:

$$\frac{d\Theta}{dr} = \frac{\dot{\Theta}}{\dot{r}} = \frac{l}{\mu r^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{T-k/r}{2\mu} - \frac{l^2}{\mu^2 r^2}}} = \frac{l/r^2}{\sqrt{2\mu(E - k/r - l/2\mu r^2)}} \tag{11}$$

Za sipanje je T pozitivna, zato se delca najprej približujeta, dosežeta točko obrata r_0 in se nato zopet oddaljita. Vrtilno količino l izračunamo, ko sta še daleč narazen - l=$\mathbf{r} \times \mathbf{G}$, kjer smo uporabili starodavno črko G za gibalno količino, $\mathbf{G}$=$\mu\mathbf{v}$. Velikost zapišemo kot l=μvb in vpeljemo impact parameter b kot razdaljo tira oddaljenega delca od delca v izhodišču, pravokotno na smer relativne hitrosti. Malo polepšamo, in dobimo l=$\sqrt{2\mu T}$b. Točko obrata izluščimo z zahtevo $\dot{r}|_{r_0} = 0$:

$$\dot{r}|_{r_0} = \sqrt{2\frac{T - \frac{k}{r_0}}{\mu} - \frac{l^2}{\mu^2 r_0^2}} = \sqrt{\frac{2T}{\mu}}\sqrt{1 - \frac{k}{Tr_0} - \left(\frac{b}{r_0}\right)^2} = 0 \tag{12}$$

$$\sqrt{1 - \frac{k}{Tb}\frac{b}{r_0} - \left(\frac{b}{r_0}\right)^2} = 0 \tag{13}$$

$$\frac{b}{r_0} = -\frac{k}{2Tb} + \sqrt{\left(\frac{k}{2Tb}\right)^2 + 1} \tag{14}$$

Skupni zasuk pri sipanju dobimo z integralom:

$$\Theta = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{d\Theta}{dr}\, dr = \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{b/r^2\, dr}{\sqrt{1 - (k/Tb)(b/r) - (b/r)^2}}, \tag{15}$$

kjer sta r_{min} in r_{max} najmanjša in največja oddaljenost od delca. Pri sipanju je $r_{max} \to \infty$, r_{min}=r_0. Upoštevali smo, da bo celoten zasuk ravno dvakrat tolikšen kot zasuk pri gibanju iz velike oddaljenosti do najbližje točke. Integral rešimo z uvedbo u=b/r in si olajšamo pisanje z notacijo $\alpha = k/Tb$:

$$\Theta = 2\int_{r_0}^{\infty} \frac{b/r^2\, dr}{\sqrt{1 - (k/Tb)(b/r) - (b/r)^2}} = \int_0^{b/r_0} \frac{du}{\sqrt{1 - \alpha u - u^2}} \tag{16}$$

$$= 2\left[-\arcsin\left\{\frac{-2u - \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 4}}\right\}\right]_0^{b/r_0} \tag{17}$$

Ker je:

$$2\frac{b}{r_0} = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4} \tag{18}$$

bo:

$$\Theta = 2\left[-\arcsin\left\{\frac{-\sqrt{\alpha^2+4}}{\sqrt{\alpha^2+4}}\right\} + \arcsin\left\{\frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}\right\}\right] = \tag{19}$$

$$= 2\left[-(-\frac{\pi}{2}) - \arcsin\left\{\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}\right\}\right] \tag{20}$$

$$\sin\left[\frac{\Theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}} \tag{21}$$

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+4}}, \tag{22}$$

kjer smo uvedli sipalni kot $\theta = \pi - \Theta$ kot spremembo smeri gibanja delca. Parameter α razpišemo v $2\kappa/b$, kjer je konstanta $\kappa = k/2T$, s predznakom ki je odvisen od potenciala - za privlačne potenciale je κ pozitivna, za odbojne pa negativna. Vidimo, da bo sipanje za nasprotne električne naboje, kjer je $\kappa > 0$ potekalo ravno zrcalno kot za enakoznačne naboje; $\sin(\theta^+/2)$= - $\sin(\theta^-/2)$, $\theta^+ = -\theta^-$. Z novo parameterizacijo je:

$$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{\kappa/b}{\sqrt{(\kappa/b)^2+1}} \tag{23}$$

Od koder lahko dobimo povezavo med sipalnim kotom θ in impact parameterom b:

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{(\kappa/b)^2}{(\kappa/b)^2+1} \tag{24}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1}{(\kappa/b)^2+1} \tag{25}$$

$$\tan^2\frac{\theta}{2} = (\kappa/b)^2 \tag{26}$$

$$\kappa = b\tan\frac{\theta}{2} \tag{27}$$

Vidimo, da sta impact parameter in sipalni kot povezana - vsi delci, ki do potenciala pridejo z določenim parameterom b, se bodo sipali v isti kot θ. Predstavljamo si curek delcev s polmerom znantno vejim od njihove velikosti in velikosti tarče, ki se gibljejo z relativno hitrostjo v. Lahko si predstavljamo površino pravokotno na smer curka - za homogene curke bo konstanten parameter število delcev na delež take prostornine na enoto časa. Temu parameteru curka rečemo fluks ali pa luminoznost. Verjetnost za reakcijo pa izrazimo kot razmerje časovne pogostosti dogodkov R in vhodnega fluksa L. Količina R/L ima enote površine, zato ji rečemo presek, σ. Skupni presek implicira merilne aparate povsod okrog detektorja. V resnici detektorji pokrivajo le majhen delež dΩ celotnega prostorskega kota, postavljeni pa so na sipalnem kotu θ glede na vpadno smer curka in lego tarče. Dobili bi radi delež preseka, ki ga pokrijemo z našim detektorjem: $D(\theta) = d\sigma/d\Omega$. Ta delež izrazimo s pomočjo zgornje zveze med b in θ:

$$D(\theta) = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{db}\left|\frac{db}{d\Omega}\right|. \tag{28}$$

Prvi del, dσ/db je relativno preprost - gledamo, kako se delež vstopnih delcev (normiranih na fluks) spreminja, ko večamo impact parameter b. Najlažje si predočimo curek razrezan na tanke valjaste preseke debeline db, na katere odpade dσ=2πbdb celotnega preseka vhodnega curka. Delež prostorskega kota je d$\Omega = d\phi \sin\theta d\theta$, lahko si zamislimo kar poln, 2π obsegajoč detektor v polarnem kotu ϕ, tako da je d$\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$. Skupaj imamo:

$$D(\theta) = \frac{2\pi b}{2\pi \sin\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right|, \tag{29}$$

kjer upoštevamo le absolutno razmerje med db in dθ v velikosti sipalnega preseka, čeprav je to zares negativno:

$$\frac{db}{d\theta} = -\frac{\kappa}{\tan^2(\theta/2)}\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}\frac{1}{2} = -\frac{\kappa}{2\sin^2(\theta/2)} \tag{30}$$

Upoštevamo še b=$\kappa/\tan(\theta/2)$ in $\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$, da dobimo:

$$D(\theta) = \frac{\kappa}{\tan(\theta/2)}\frac{1}{2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}\frac{\kappa}{2\sin^2(\theta/2)} = \frac{\kappa^2}{4\sin^4(\theta/2)} \tag{31}$$

1.2 Kvantno Rutherfordovo sipanje (Bornov približek)

Začnemo z zlatim Fermijevim pravilom:

$$w_{i\to f} = \frac{2\pi}{\hbar}\langle\psi_f|V(\mathbf{r})|\psi_i\rangle^2\rho(E),$$

kjer je V($\mathbf{r}$) potencial, v katerem se sipajo delci, $|\psi_i\rangle$ in $|\psi_k\rangle$ valovni funkciji začetnega in končnega stanja in $\rho(E)$ gostota stanj pri energiji E. $w_{i\to f}$ je število prehodov na enoto časa za dan tok delcev. Začetno in končno valovno funkcijo zapišemo kot produkt elektronske valovne funkcije $\sigma(\mathbf{r})$=$\sqrt{n}$·exp($i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$) in nukleonskega dela $\Phi(\mathbf{R})$. Privzeli bomo, da sta Φ_i in Φ_f že normirani, elektronske funkcije pa smo normirali na številsko gostoto delcev v curku n; n ima enote m−3. Potenical bomo zapisali kot V($\mathbf{r}$)=k/r, saj je odvisen le od medsebojne razdalje jedra in elektrona. Konstanta k bo enaka $Z_1Z_2e_0^2/4\pi\epsilon_0$ za sipanje delca z nabojem Z_1e_0 na jedru z nabojem Z_2e_0 in bo večja od nič za nasprotna naboja in negativna za enakoznačna naboja.
V matričnem elementu bo torej:

$$\mathcal{M} = \langle\psi_k|V(\mathbf{r})|\psi_k\rangle >= \int d^3\mathbf{R}d^3\mathbf{r}\sqrt{n}e^{i\mathbf{k'r}}\Phi_f(\mathbf{R})\frac{k}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}\sqrt{n}e^{-i\mathbf{kr}}\Phi_i(\mathbf{R})$$

Uvedemo **s=k'-k** in **r'=r-R**; d^3**r**→ d^3**r'**:

$$\mathcal{M} = n\int d^3\mathbf{R}\Phi_f(\mathbf{R})\Phi_i(\mathbf{R})e^{i\mathbf{sR}}\int d^3\mathbf{r}'e^{i\mathbf{sr}'}\frac{k}{r'}$$

V matričnem elementu imamo produkt elektronskega in nukleonskega dela. V elektronskega dodamo še dušenje exp(-μr'), ki nam ponazarja senčenje jedra na razdaljah primerljivih z atomskim oblakom. Uvedemo koordinatni sistem, katerega os z je vzporedna razliki valovnih vektorjev **s**, tako da lahko zapišemo **sr'**=sr'cosθ. Integralna funkcija je neodvisna od polarnega kota ϕ, ostane pa:

$$\begin{aligned}
\int d^3\mathbf{r}' e^{i\mathbf{s}\mathbf{r}'}\frac{k}{r'} &= 2\pi k\int_0^\infty dr' r' e^{-\mu r'}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta) e^{-isr'\cos\theta} \\
&= 4\pi\frac{k}{s}\int_0^\infty dr'\sin(sr')e^{-\mu r'} = 4\pi\frac{k}{s}\frac{s}{s^2+\mu^2} \\
&= 4\pi\frac{k}{s^2}
\end{aligned}$$

kjer smo v zadnji vrstici dušenje spet odstranili ($\mu \to 0$) in tako rekonstruirali pravo obliko potenciala.
V nukleonskem delu predpostavimo, da se jedro ni spremenilo med sipanjem, torej Φ_i=Φ_f, kar nam da v produktu kar številsko gostoto naboja:

$$\int d^3\mathbf{R}\Phi_f(\mathbf{R})\Phi_i(\mathbf{R})e^{i\mathbf{s}\mathbf{R}} = \int d^3\mathbf{R}\rho(\mathbf{R})e^{i\mathbf{s}\mathbf{R}} = F(\mathbf{s}),$$

čemur rečemo oblikovni faktor F(**s**) in je povezan z obliko razporeditve električnega naboja v jedru. Skupaj bo:

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi kn}{s^2}F(\mathbf{s})$$

Gostoto stanj določimo za elektronska stanja:

$$\rho(E)d\Omega dE = d^3\mathbf{k}'/n(2\pi)^3 = k'^2 dk d\Omega/n(2\pi)^3$$

ker je desna stran neodvisna od Ω, upravičimo zapis $\rho(E)$. Zamenjajmo valovne vektorje z gibalnimi količinami, p=$\hbar$k Torej $\rho(E) = p'^2dp'/dE/n(2\pi\hbar)^3$. Energija E je skupna energija

$$E = Mc^2 + \sqrt{m^2c^4+p^2c^2} = \sqrt{M^2c^4+P^2c^2} + \sqrt{m^2c^4+p'^2c^2}$$

Upoštevajmo, da je energija elektronov ravno vmes med maso elektronov mc^2 in maso jeder Mc^2, tako da pri energiji elektronov zanemarimo njihovo maso (mirovno energijo). Po drugi strani upo vstevamo ohranitev gibalne količine:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \hbar\mathbf{s}$$

in izračunamo P^2=$\hbar^2 s^2$=(**p'**-**p**)^2=p'^{2}+p^2-2pp'cosθ. Od tu je jasno, da bo $\hbar$s kvečjemu velikosti p in bo tako Pc precej manjše od Mc^2 v izbranem energijskem območju. Torej bo Mc$^2 \approx \sqrt{M^2c^4+P^2c^2}$ in s tem p$\approx$p'. Od tu rečemo p-p'$\approx$ 0, kar je še bolj res, če naredimo (p-p')^2;

$$(p-p')^2 = 0 = p^2 + p'^2 - 2pp' \qquad \to p^2 + p'^2 = 2pp'$$

kar nam da za prenos gibalne količine:

$$\hbar^2 s^2 = p^2 + p'^2 - 2pp'\cos\theta = 2pp'(1-\cos\theta) = 4pp'\sin^2\theta/2$$

Določimo še povezavo med p' in p:

$$\begin{aligned}
Mc^2 + pc &= \sqrt{M^2c^4 + \hbar^2 s^2 c^2} + p'c \\
(Mc + p - p')^2 &= M^2c^2 + \hbar^2 s^2 \\
2Mc(p - p') &= 4pp'\sin^2\theta/2 \\
p - p' &= \frac{2pp'\sin^2\theta/2}{Mc} \\
p &= p'(1 + \frac{2p\sin^2\theta/2}{Mc})
\end{aligned}$$

In še potrebni odvod dE/dp':

$$\begin{aligned}
\frac{E}{c} &= p' + \sqrt{M^2c^2 + \hbar^2 s^2} \\
\frac{1}{c}\frac{dE}{dp'} &= 1 + \frac{4p\sin^2\theta/2}{2\sqrt{M^2c^2 + \hbar^2 s^2}}; \quad \hbar s \ll Mc \to \sqrt{M^2c^2 + \hbar^2 s^2} \approx Mc \\
\frac{1}{c}\frac{dE}{dp'} &= 1 + \frac{2p\sin^2\theta/2}{Mc} \\
\frac{dE}{dp'} &= c\frac{p}{p'}
\end{aligned}$$

Poberimo še vse skupaj:

$$\begin{aligned}
w_{i\to f} &= \frac{2\pi}{\hbar}\left(\frac{4\pi k n}{s^2}\right)^2 |F(\mathbf{s})|^2 p'^2 \frac{p'}{cp}/n(2\pi\hbar)^3 \\
&= 4\left(\frac{k}{\hbar^2 s^2}\right)^2 \left|F(\mathbf{s})\right|^2 \frac{p'^3}{cp} n \\
&= 4k^2 nc\frac{p'^3}{p}\frac{1}{16p^2p'^2\sin^4\theta/2}|F(\mathbf{s})|^2 \\
&= nc\left(\frac{k}{2pc\sin^2\theta/2}\right)^2 \frac{p'}{p}|F(\mathbf{s})|^2
\end{aligned}$$

Presek bo število prehodov normirano na vhoden tok oz. luminoznost, ki jo določimo kot nv, kjer je n gostota vstopajočih elektronov, v pa njihova hitrost. Brez hude napake za hitrost vzamemo kar svetlobno hitrost, tako da imamo:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{k}{2pc}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\theta/2}\frac{p'}{p}|F(\mathbf{s})|^2$$

1.3 Geiger-Nuttalovo pravilo

Pri razpadu α se mora delec s kinetično energijo Q prebiti skozi električni potencial jedra, torej od mesta nastanka

$$r_s = r_D + r_\alpha = r_0 * (A_D^{1/3} + A_\alpha^{1/3})$$

kjer smo z indeksom D označili parametre nastalega jedra (daughter) in z indeksom α parametre delca α. Delec α bo zunaj potencialne bariere, ko bo njena moč, $V(r_s)=Z_D Z_\alpha \alpha\hbar c/r_c$ enaka kinetični energiji Q:

$$r_c = \frac{Z_D Z_\alpha \alpha\hbar c}{Q},$$

konstanta α je konstanta fine strukture, 1/137.
Verjetnost prehoda dobimo iz Schrodingerjeve enačbe:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V(r)\Psi = E\Psi$$

Enačbo separiramo po spremenljivkah r,θ,ϕ. Ker je potencial odvisen le od velikosti razdalje, bodo re vistve v θ in ϕ krogelne funkcije $Y_{lm}(\theta,\phi)$, enačba za R(r) pa bo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR(r)) + (V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m})R(r) = ER(r)$$

Masa m je v tem primeru masa problema, torej reducirana masa nastalega delca α in novega jedra:

$$m = \frac{m_D m_\alpha}{m_D + m_\alpha}$$

Člen $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$ lahko zanemarimo, saj je izven dosega močne sile, $r>r_s$ reda velikosti $200^2/(36\cdot1800)$ 0.6 MeV, kjer smo za doseg sile vzeli tipični radij jedra (6 fm), za reducirano maso pa kar polovičko m_α. Ker se potencialna bariera tipično razteza dlje (50-100 fm v večini primerov), reducirana masa pa je za tipične razpade kar enaka m_α, bo prispevek vrtilne količine vsaj red velikosti manjši od potencialne bariere.
Enačbe se lotimo z nastavkom R(r)=U(r)/r, dobimo:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2U}{dr^2} + V(r)U(r) = QU(r)$$

kjer smo že upoštevali, da rešujemo za delec s kinetično energijo Q. To pa je enaka enčba kot pri prehodu curka delcev preko potencialnega skoka v eni dimenziji, kjer smo se naučili, da je razmerje med tokom pred in po oviri sorazmerno z:

$$\left|\frac{U(r)}{U(0)}\right| = e^{-Kr}$$

kjer je K=V_0-Q. Ker je gostota delcev α konstatnta po površini, na kateri nastanejo, torej $4\pi r_s^2$, bo verjetnost, da bomo opazili delec zunaj jame enaka:

$$P = \frac{|R(r_c)|^2 4\pi r_c^2}{|R(r_s)|^2 4\pi r_s^2} = \left|\frac{U(r_c)}{U(r_s)}\right|^2$$

Rešitev za eno dimenzionalen skok nam da misliti, da iščemo rešitev oblike

$$U(r) = e^{\varphi(r)}$$

Potem se enačba prevede v

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{d^2\varphi}{dr^2} - \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)^2\right] + (V - Q) = 0$$

Če se potencial V(r) ne spreminja prehitro, bo $d^2\varphi/dr^2 \ll (d\varphi/dr)^2$ in v enačbi obdržimo le prvi odvod, torej

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{2m(V-Q)}{\hbar^2}}$$

Rešitev $\varphi(r)$ bo kompleksna, ko bo Q>V, kar nam da ravne valove, ki jih navadno povezujemo s prostimi delci. No, med r_s in r_c pa bo V(r)>Q, torej bo φ(r) realna. Ob $\sqrt{\cdot}$ lahko vzamemo tako pozitivno kot negativno rešitev, pozitivna bi dajala padanje verjetnosti za delce, ki nastajajo zunaj bariere in prehajajo v jedro in je ne bomo upoštevali, bomo pa upo vstevali negativno rešitev. V delu med r_s in r_c bo torej:

$$U(r) = U(r_s)e^{-\int_{r_s}^{r} K(r)\,dr}$$

in razmerje bo:

$$P = \left|\frac{U(r_c)}{U(r_s)}\right|^2 = e^{-2\int_{r_s}^{r_c} K(r)\,dr} = e^{-G}$$

Eksponent razmerja smo označili z G;

$$G = 2\int_{r_s}^{r_c}\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}\left(\frac{Z_D Z_\alpha \alpha\hbar c}{r} - Q\right)}\,dr$$

Uporabimo povezavo med Q in r_c in uvedemo brezdimenzijsko integracijsko spremenljivko t=r/r_c:

$$G = 2\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}Z_D Z_\alpha \alpha\hbar c r_c}\int_{r_s/r_c}^{1}\sqrt{\frac{1}{t} - 1}\,dt$$

Integral označimo z f(x) in upoštevamo povezavo med Q in r_c:

$$G = 2Z_D Z_\alpha \alpha\sqrt{\frac{2mc^2}{Q}}f\left(\frac{r_s}{r_c}\right)$$

To je Geiger-Nuttalovo pravilo. Funkcija f(x) tudi ni zelo zapletena - integral rešimo z uvedbo spremenljivke u=cos$^2\gamma$, du=-2sinγcosγ v:

$$f(x) = \int_x^1 \sqrt{\frac{1}{t} - 1}\, dt = \int_0^{\arccos\sqrt{x}} 2\sin^2\gamma\, d\gamma = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}$$

Ker bo imela funkcija f(x) vrednosti med 0 in $\pi/2$, stlačimo konstanto še v njeno definicijo, potem imamo končno:

$$G = Z_D Z_\alpha \alpha\pi \sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} f(x)$$
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left(\arccos\sqrt{x} - \sqrt{x(1-x)}\right)$$

Nekaj vrednosti take funkcije f(x) podaja tabela ob vajah.

1.4 Fazni prostor pri razpadu β

Verjetnost za razpad β zapišemo po zlatem pravilu:

$$d\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\mathcal{M}\right|^2 n_f(E)$$

Delamo se, da sta nastala delec β in nevtrino prosta:

$$\Psi_\beta = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_\beta\cdot\mathbf{r}} \qquad \Psi_\nu = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}_\nu\cdot\mathbf{r}}$$

Potem razvijemo matrični element okrog -i($\mathbf{k}_\beta$+k$_\nu$)$\mathbf{r}$, ki je za izmerjene energije nastalih delcev (nekaj MeV) na razdaljah primerljivih s polmeri razpadajočih jeder (nekaj fm) velikosti 0.1:

$$\mathcal{M} = \frac{G_W}{V}\left(M_0 - i(\mathbf{k}_\beta + \mathbf{k}_\nu)M_1 + \dots\right)$$

kjer smo z G$_W$ označili jakost sklopitve/verjetnost razpada/naboj. Omejujoč se na ničti red, v procesih, kjer ta prevladuje, bo matrični element neodvisen od smeri in velikosti gibalne količine nastalih delcev:

$$\mathcal{M} = \frac{G_W}{V} M_0$$

Gostoto stanj zapišemo kot navadno za proste delce:

$$n(k)d^3k = \frac{d^3kV}{(2\pi)^3}$$

Mogoče se spomnimo od kod nam ta izraz - ko imamo proste delce, zaprte v škatli, zahtevamo $\Psi(-L/2)$=$\Psi(L/2)$ kjer je L dimenzija škatle. Razvijmo rešitev po sinusih, $\Psi(x) = \sum a_i \sin k_i x$. Ker morajo veljati robni pogoji, morajo biti k_i rešitve stoječega valovanja, $k_i = i \cdot 2\pi/L$. Na eno stanje odpade interval $k_1 = 2\pi/L$ valovnih vektorjev, v intervalu Δk je torej:

$$n(k) = \frac{\Delta k}{k_1} = \frac{\Delta k L}{2\pi}$$

možnih stanj. Ko pošljemo volumen škatle k znantnim dolžinam ($\Delta k \to dk$)in upoštevamo vse tri dimenzije, dobimo zgornji izraz.
V zlatem pravilu imamo gostoto stanj po energiji, ki razpade na nevtrinska in stanja delca β. Na intervalu dE energije delca β bomo imeli

$$n_f(E) = n_\nu(E_0 - E) n_\beta(E) dE$$

stanj, kjer je E_0 skupna energija, ki je na voljo za razpad, enaka energijski razliki med razdpadajočim in nastalim jedrom. (Včasih razpadajoče jedro, starš, ne razpade naravnost v osnovno stanje nastalega jedra, hčere, ampak v eno od hčerinih vzbujenih stanj. Potem je E_0 razlika med staršem in hčerinim vzbujenim stanjem). Ker sta delec β in nevtrino v tri-delčnem razpadu neodvisna, bo gostota n(k) odvisna le od velikosti (in ne od relativne smeri) valovnega vektorja, gostoti izračunamo vsako zase:

$$n(E)dE = n(k)d^3k = \frac{4\pi k^2 dk V}{(2\pi)^3} \quad \to \quad n(E) = \frac{V}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{dE}$$

Povezavo med k in E dobimo iz relativistične(!) povezave med energijo in gibalno količino:

$$E = \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2c^2k^2} \quad \to \quad dE = \frac{\hbar^2c^2k\ dk}{E}\ ;\ k\ dk = \frac{E\ dE}{\hbar^2c^2}\ ;\ k = \frac{\sqrt{E^2 - m^2c^4}}{\hbar c}$$

Skupaj torej:

$$n(E') = \frac{V}{2\pi^2} \frac{\sqrt{E'^2 - m^2c^4}}{\hbar^3c^3} E'$$

To nesemo v zgornji izraz za skupno gostoto, ga izvrednotimo za E'=E-E_0 in m'=0 (nevtrino) in E'=E ter m=m_e (β):

$$n_f(E) = \frac{V^2}{4\pi^4} \frac{(E - E_0)^2 \sqrt{E^2 - m_e^2c^4} E}{\hbar^6c^6} dE$$

Skupaj bo torej Γ enaka:

$$\frac{d\Gamma}{dE} = \frac{G_W^2 M_0^2}{2\pi^3} \frac{(E - E_0)^2 \sqrt{E^2 - m_e^2c^4} E}{\hbar^7c^6}$$

Na funkcijo S(E)=(E-E_0)^2 $\sqrt{E^2 - m_e^2c^4}$E lahko gledamo kot na (ne-normirano) verjetnostno porazdelitev, da bo imel nastali delec β (skupno) energijo E. Iz kinematskih razlogov bo E med m_ec^2 in E_0. Določimo lahko povprečno in najverjetnejšo energijo razpada (vaje!).

V izrazu smo za valovno funkcijo delca β vzeli kar valovno funkcijo prostega delca. Zares pa ima delec β tudi osnovni naboj, ki reagira z jedrom in zato spremeni valovno funkcijo delca β. Za razpad β je odstopanje parametrizirano s Fermijevo funkcijo F(Z_D,E) pri danem naboju hčerinskega jedra Z_D in energiji delca E; tako popravljeno dobimo novo funkcijo S'(Z_D,E)=S(E)F(Z_D,E). Lahko izračunamo tudi skupno verjetnost za razpad na enoto časa:

$$\Gamma = \frac{G_W^2 M_0^2 m_e^5 c^{10}}{2\hbar^7 c^6 \pi^3} f(E_0, Z_D)$$

kjer smo uvedli brezdimenzijsko funkcijo:

$$f(E_0, Z_D) = \frac{1}{m_e^5 c^{10}} \int_{m_e c^2}^{E_0} S'(E', Z_D)\, dE',$$

ki je pogosto tabelirana (nekaj vrednosti na voljo tudi pri vajah).

1.5 Simetrijske lastnosti mezonov in barionov

Lastnosti operatorja J_+ in J_-

Pokaži, da je:

$$J_\pm|jm\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j(m\pm 1)\rangle$$

Najprej pokažemo, da je

$$J_3 J_\pm|jm\rangle = (m \pm 1)J_\pm|jm\rangle$$

Zato najprej izračunamo komutator:

$$\begin{aligned} [J_3, J_\pm] &= \\ &= J_3(J_1 \pm iJ_2) - (J_1 \pm iJ_2)J_3 = [J_3, J_1] \pm i[J_3, J_2] = \\ &= iJ_2 \pm i(-iJ_1) = \pm J_1 + iJ_2 = \pm J_\pm \end{aligned}$$

nato pa

$$J_3 J_\pm|jm\rangle = \Big(J_\pm J_3 + [J_3, J_\pm]\Big)|jm\rangle = (m \pm 1)J_\pm|jm\rangle$$

torej lahko pišemo:

$$J_\pm|jm\rangle = C_\pm^m|j(m\pm 1)\rangle$$

Določimo še enakost J_+J_-:

$$J_+J_- = (J_1 + iJ_2)(J_1 - iJ - 2) = J_1^2 + J_2^2 + i[J_2, J, 1] = J^2 - J_3^2 + i(-iJ_3) = J^2 - J_3^2 + J_3$$

Podobno bo:

$$J_-J_+ = J^2 - J_3^2 - J_3$$

Opazimo, da sta J_1 in J_2 adjungirana operatorja, torej:

$$J_-^\dagger = J_+ \quad \text{in} \quad J_+^\dagger = J_-$$

Potem pa:

$$
\begin{aligned}
\langle jm|J_+J_{|}jm\rangle &= \langle jm|(J^2 - J_3^2 + J_3)|jm\rangle \\
\langle jm|J_-\Big|J_-|jm\rangle &= C - m^2 + m \\
C_+^{m*}C_+^m &= C - m^2 + m \\
C_+^m &= \sqrt{C - m^2 + m}
\end{aligned}
$$

Podobno bo:

$$C_-^m = \sqrt{C - m^2 - m}$$

Konstanto C določimo za stanja z največjim (najmanjšim) m. Takrat mora biti C_+^m=0 (C_-^m=0), kar nam za m=j da C=j(j+1) (ditto), kar nam dokaže zgornji izraz.