8. naloga: Robni problem lastnih vrednosti

Za majhna prečna nihanja prosto viseče težke vrvi velja enačba:

$$\frac{d}{dy}\left(y\,\frac{dz}{dy}\right) + \frac{\omega^2}{g}z = 0,$$

kjer pomeni z amplitudo in y koordinato vzdolž vrvi, šteto od prostega konca navzgor. Iščemo lastne frekvence ω, g pa je pospešek prostega pada. Robna pogoja zahtevata:

$$z(0) \quad \text{omejena (enaka amplitudi)}, \qquad z(l) = 0.$$

Za analitično reševanje ta pogoj zadošča, ker je enačba pri $y = 0$ singularna. (Rešitve so $J_0(j_{0s}\sqrt{y/l})$, kjer je j_{0s} s-ta ničla funkcije J_0; $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{g/l}\,j_{0s}$.)

Gornji sistem lahko rešimo s streljanjem ali pa z metodami končnih diferenc (oz diagonalizacijo):

Pri numeričnem reševanju razdelimo definicijsko območje na N enakih intervalov $h = l/N$. V delilnih točkah zapišemo diferenčne aproksimacije:

$$i \cdot (z_{i+1} - 2z_i + z_{i-1}) + \frac{1}{2}(z_{i+1} - z_{i-1}) + hpz_i = 0,$$

$$i = 1, 2, \ldots, N-1\;, \qquad z_N = 0.$$

Lastna vrednost $h \cdot p = l/N \cdot \omega^2/g$ je tista, pri kateri ima sistem netrivialno rešitev. Manjka nam še ena enačba; vzamemo lahko tisto pri $i = 0$, če uporabimo nesimetrično aproksimacijo za prvi odvod.

Za lastne vrednosti torej iščemo vrednost $\lambda = h \cdot p$, pri kateri zadanemo v $z = 0$ pri $y = l$, če začnemo pri $y = 0$ s poljubno vrednostjo. Osnovno lastno frekvenco pa lahko določimo tudi s potenčno metodo (iteracijo).

Za gornji primer obstaja še zanimiva varianta: z uvedbo nove spremenljivke izločimo lastno vrednost:

$$\frac{d}{dx}\left(x\,\frac{du}{dx}\right) + u = 0\;, \qquad u(0) = -\left(\frac{du}{dx}\right)(0) = 1 \tag{1}$$

ter rešujemo od $x = 0$ s poljubno začetno vrednostjo $(u = 1)$ ter odvodom $du/dx = -u = -1$. Točno določimo vrednosti x, pri katerih rešitev preseka os x: iz njih dobimo lastne vrednosti.

Naloga: Določi najnižje tri lastne frekvence in načine nihanja vrvi s streljanjem in z metodo (1). Primerjaj s metodo končnih diferenc (in poljubno metodo diagonalizacije).