5. naloga: Lastne vrednosti simetričnega tenzorja

Simetrični tenzor $\underline{A}$ ranga j ima lastne vrednosti λ_i in njim ustrezne lastne vektorje $\boldsymbol{x}_i$, določene z

$$\underline{A}\,\boldsymbol{x}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{x}_i, \qquad i = 1, \ldots, j.$$

Lastne vrednosti lahko poiščemo iz sekularne enačbe, ki ustreza matriki

$$\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I},$$

torej iz enačbe podane z determinanto:

$$\mathrm{Det}\,(\underline{A} - \lambda \cdot \underline{I}) = 0.$$

Izberemo metodo za hitro računanje determinant in določimo ničle te enačbe z bisekcijo ali kako podobno metodo.

Za velike matrike je taka prevedba na algebrajsko enačbo nepraktična in tudi sicer neuporabna, ker so koreni enačbe preobčutljivi na napake koeficientov. V takem primeru računamo raje neposredno in poskušamo matriko $\underline{A}$ diagonalizirati. Za simetrične matrike obstaja veliko naprednih metod (Jacobijeva, Householderjeva...), ki jih je enostavno sprogramirati. Metode bazirajo na matematičnemu teoremu, da se da vsaka simetrična matrika diagonalizirati s pomočjo ortogonalne matrike Q:

$$A(\mathrm{diag}) = Q^T \cdot A \cdot Q,$$

kjer potem stolpci matrike Q predstavljajo tudi ustrezne lastne vektorje. Različne numerične metode nam ponudijo izračun matrike Q.

Obstajajo tudi zelo preprosti načini za ekstrakcijo posameznih lastnih vrednosti: Največjo lastno vrednost dobimo lahko tudi s potenčno metodo: s poljubnim začetnim približkom $\boldsymbol{x}^{(0)}$ za lastni vektor vstopimo v iteracijo

$$\boldsymbol{y}^{(i+1)} = \underline{A}\,\boldsymbol{x}^{(i)}, \quad \boldsymbol{x}^{(i)} = a\,\boldsymbol{y}^{(i)},$$

kjer je a normalizacijska konstanta, s katero renormaliziramo vektorje $\boldsymbol{x}^{(i)}$ na stalno velikost. Ko se začne v postopku vektor $\boldsymbol{x}$ ponavljati, je a dober približek za lastno vrednost, $\boldsymbol{x}$ pa za ustrezni lastni vektor. Podobno lahko poiščemo tudi najmanjšo lastno vrednost, ki je enaka največji lastni vrednosti $\underline{A}^{-1}$. (Ko v matriki ranga 4 določimo največjo in najmanjšo lastno vrednost, nam za drugi dve preostane le še kvadratna enačba.)

Naloga: Na različne načine (Jacobijeva metoda, Householderjeva metoda, iskanje ničel sekularne enačbe, iterativno, …) določi lastne vektorje in lastne vrednosti matrik in primerjaj racunske natancnosti v obeh primerih. Do kakšnih vrednosti bi lahko povečevali diagonalne vrednosti, da bi ostali znotraj numerične natančnosti? Je to tu sploh problem?

- $$\begin{bmatrix} 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 & 0.000001 \\ 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 \\ 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 & 0.01 & 0.001 \\ 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000 & 0.1 & 0.01 \\ 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. & 0.1 \\ 0.000001 & 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 1000. \end{bmatrix}$$

- $$\begin{bmatrix} 10^6. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 & 0.000001 \\ 0.1 & 10^6. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 & 0.00001 \\ 0.01 & 0.1 & 10^6. & 0.1 & 0.01 & 0.001 & 0.0001 \\ 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6. & 0.1 & 0.01 & 0.001 \\ 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 & 0.01 \\ 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 & 0.1 \\ 0.000001 & 0.00001 & 0.0001 & 0.001 & 0.01 & 0.1 & 10^6 \end{bmatrix}$$

Dodatna Naloga: Na različne načine (Jacobijeva metoda, iskanje ničel sekularne enačbe, iterativno) določi lastna nihanja in lastne frekvence sistema, ki ga sestavljajo tri uteži z masami m_1, m_2, m_3, ki so zaporedno pripete s štirimi vzmetmi s konstantami k_1, k_2, k_3, k_4, med dve nepremični steni in med seboj. Če so konstante vzmeti in mase uteži izbrane tako, da ima sistem kako simetrijo, npr. $k_1 = k_4$,$k_2 = k_3$,$m_1 = m_3$ lahko nekatere lastne načine uganeš. Poišči tudi lastna nihanja sistemov, ki niso simetrični!