10. naloga: Fourierova analiza

Pri numeričnem izračunavanju Fourierove transformacije

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \exp(2\pi i f t) \, dt \tag{1}$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) \exp(-2\pi i f t) \, df \tag{2}$$

je funkcija $h(t)$ običajno predstavljena s tablico diskretnih vrednosti

$$h_k = h(t_k), \quad t_k = k\Delta, \quad k = 0, 1, 2, \ldots N-1. \tag{3}$$

Pravimo, da smo funkcijo vzorčili z vzorčno gostoto $1/\Delta$. Za tako definiran vzorcu obstaja naravna meja frekvenčnega spektra, ki se imenuje *Nyquistova frekvenca*, $f_c = 1/(2\Delta)$: harmonični val s to frekvenco ima v naši vzorčni gostoti ravno dva vzorca v periodi. Če ima funkcija $h(t)$ frekvenčni spekter omejen na interval $[-f_c, f_c]$, potem ji z vzorčenjem nismo odvzeli nič informacije: kadar pa se spekter razteza izven intervala, pride do *potujitve* (*aliasing*), ko se zunanji del spektra preslika v interval.

Frekvenčni spekter vzorčene funkcije (3) spet računamo samo v N točkah, če hočemo, da se ohrani količina informacije. Vpeljemo vsoto

$$H_n = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \exp(2\pi i k n/N), \qquad n = -N/2, \ldots, N/2, \tag{4}$$

ki jo imenujemo diskretna Fourierova transformacija, in je povezana s funkcijo v (1) takole:

$$H(n/(N\Delta)) \approx \Delta \cdot H_n.$$

Zaradi potujitve, po kateri je $H_{-n} = H_{N-n}$, lahko mirno pustimo indeks n v enačbi (4) teči tudi od 0 do N. Spodnja polovica tako definiranega spektra ustreza pozitivnim frekvencam med 0 in f_c , gornja pa negativnim od $-f_c$ do 0.

Z diskretno obratno transformacijo lahko rekonstruiramo h_k iz H_n

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H_n \exp(-2\pi i k n/N). \tag{5}$$

Količine h in H so v splošnem kompleksne, simetrija v enih povzroči tudi simetrijo v drugih. Za realne h so H paroma konjugirani, $H(-f) = H(f)^*$.

Naloga:

- Izračunaj Fourierov obrat nekaj enostavnih vzorcev, npr. raznih mešanic izbranih frekvenc. Primerjaj rezultate, ko je vzorec v intervalu periodičen (izbrane frekvence so mnogokratniki osnovne frekvence), z rezultati, ko vzorec ni periodičen. Opazuj pojav potujitve na vzorcu, ki vsebuje frekvence nad Nyquistovo frekvenco. Napravi še obratno transformacijo (5) in preveri natančnost metode.